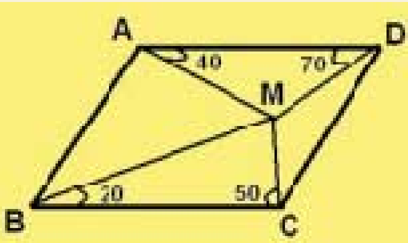
Engin Toktaş
matematik_kulesi@yahoo.com

Matematik Kulesi, okuyucuların her ay artan ilgisi sayesinde yükselmeye devam ediyor. Gelen istekler üzerine önümüzdeki sayılarda sizlerin gönderdiği soruları, matematik konularını ve ilginç ispatları da yayımlamaya karar verdik. Yazılarınızı ve çözümleriyle birlikte sorularınızı e-mail adresimiz aracılığıyla bize iletebilirsiniz. Matematik Kulesi'nde görüşmek dileğiyle...

Paralelkenarda bilinmeyenler

ABCD paralel kenarının içinde bir M noktası alınıyor. Şekilde gösterilen açılar bilindiğine göre paralel kenarımızın tüm iç açılarını bulabilir misiniz?



En Küçük Değer

Elimizde 1998 tane birbirinden farklı doğal sayının oluşturduğu bir sayı dizisi var. Dizi elemanlarından hiçbiri dizideki herhangi iki elemanın toplamına eşit değil. Bu kurala göre dizinin en büyük elemanının alabileceği en küçük değer nedir?

Fibonacci'ye Veda

Son iki sayımızda anlattığımız Fibonacci sayılarına güzel bir soruyla (şimdilik) veda ediyoruz. Fibonacci serisi 1 ,1 ,2 ,3 ,5 ,8 ,13 ,21 ,... şeklinde ilerler ve her sayı kendinden önceki iki sayının toplamına eşittir. $m \geq 2$ olması koşuluyla m basamaklı Fibonacci sayılarının dörtten az ve beşten çok olamayacağını gösterebilir misiniz?

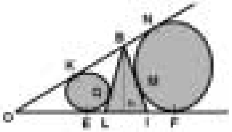
Üç Aceleci Arkadaş

Aceleleri olan üç arkadaş, A şehrinden 30 km uzaklıktaki B şehrine gitmek istiyorlar. Ellerinde saatte 30 km hız yapabilen bir yarış bisikleti ile saatte 20 km hız yapabilen bir dağ bisikleti var. Yürüyerek ise herbiri saatte 6 km hızla gidebiliyorlar. Herhangi biri eğer gerekli olursa bisikleti yolun kenarına bırakıp kendi yoluna devam edebilir. Böylece arkadan gelen arkadaşı bu bisikleti kullanabilir. Grubun son elemanının B şehrine varışı, süreyi belirlediğine göre bu şartlar altında grup en az ne kadar sürede B şehrine varabilir?

Geçen Ayın Çözümleri

Arada kalmak:

Sorunun özel bir hali olarak iki eşit çember alırsak ikizkenar üçgenin yüksekliğinin 1 birim olacağını kolaylıkla görebiliriz. Ancak gelin bu sonucun her durumda da geçerli olduğunu ispatlayalım. Öncelikle BL =BI =a ve LI=2b alalım. Bir noktadan çembere çizilen teğetlerin uzunluğu eşittir. Buna göre EL = LQ , BQ = BK ve OE = OK olur.



Bu üç eşitliği ve şeklimizi kullanarak OE + BQ =OK + BK =OB ve (LO – LE) + (LB – LQ) = OB eşitliklerini türetebiliriz. En son eşitlikte LE = LQ olduğu için LQ = (LO + LB – OB)/2 yazılabilir. Aynı şekilde IM = (BO + IB – OI)/2 eşitliği de elde edilir. İki eşitliği toplayalım:
LQ + IM = (LO + LB + BI – OI)/2 = (2LB – LI)/2 = a – b
Şimdi $\angle ELQ = \angle FIM = \alpha$ alalım. Buna göre r/LQ = R/IM = cot(α/2) ve dolayısıyla (r+R)/(LQ+IM) = cot(α/2) olur. Trigonometrik denklemlerde cot(α/2) = sin α / (1 – cos α) 'ya eşittir. Sin α ve cos α , LBI üçgenine göre hesaplanırsa (r + R) / (a – b) = cot (α /2) = h / (a – b) olduğu bulunur. Sonuç olarak r + R = h eşitliğini elde ettik. Böylece en başta söylediğimiz gibi h = 1 sonucuna ulaşmış oluruz.

Sihirli Formül :

Formülümüzden elde edilen sayıya A diyelim:
$A = (3n^5 + 5n^3 + 7n) / 15$. A sayısının tamsayı olabilmesi için payın yani $B = 3n^5 + 5n^3 + 7n$ 'in 15'e tam bölünmesi gerekiyor. Payın 3 ve 5'e tam bölündüğünü gösterebilirsek soruyu çözmüş olacağız. Önce 3 ile bölündüğünü gösterelim.
$3n^2 = 0(\text{mod}3)$, $5n^3 = 2n^3(\text{mod}3)$ ve $7n = n(\text{mod}3)$ olur. Yani $B = 2n^3 + n = n(2n^2 + 1)$'dir. Mod 3'te çalıştığımız için n sadece 0,1 veya 2 değerlerinden birini alabilir. Bu değerleri teker teker $B = n(2n^2 + 1)$ formülünde yerine koyarsanız mod3'te hep sıfırı elde ettiğinizi göreceksiniz. Yani payımız tüm n değerlerinde 3 ile bölünür. Aynı yöntemi kullanarak $B = 3n^5 + 2n = n(3n^4 + 2)$'yi elde edebiliriz. Bu sayı da n'nin alabileceği 0,1,2,3 ve 4 değerlerinde hep 5'e bölünür. Bunu n ve 5'in aralarında asal olduğunu bilerek $n^4 = 1(\text{mod}5)$ özelliğini kullanarak rahatlıkla gösterebiliriz. Sonuç olarak pay hem 3'e hem de 5'e bölündüğü için 15'e de bölünmüş olur.

Abaküsle Çalışmak:

Her iki sayıyı da $2^{49}.\ 5^{21}$ sayısıyla çarpalım. Böylece $29^{200}.2^{200}.5^{21}$ ve $3^{300}.5^{300}.2^{49}$ sayılarını elde ederiz. Kolaylıkla $5^3 < 2^7$ (125 < 128) ve her iki tarafın 7.dereceden üssünü alarak $5^{21}<2^{49}$ eşitsizlikleri görülebilir. Aynı şekilde $(29.2)^2 < (3.5)^3$ eşitsizliği 3364 < 3375 olduğu için geçerlidir. Bu da $29^{200}.2^{200} < 3^{300}.5^{300}$ eşitsizliğinin doğruluğunu kanıtlar. Geriye sadece bildiğimiz iki eşitsizliği çarpmak kalıyor: $29^{200}.2^{200}.5^{21} < 3^{300}.5^{300}.2^{49}$. Yani $29^{200}.2^{151} < 5^{179}.3^{300}$ 'dür.

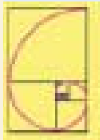
Fibonacci ve 10 Basamaklı Sayılar:

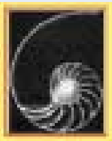
Dizimizdeki sayıları iki gruba ayıralım. Son rakamı 5 olanlar birinci grubu, son rakamı 2 olanlar ikinci grubu oluştursun. Birincil gruptaki sayıların son rakamından 5 i silersek, iki tane 2'nin yan yana gelmediği 9 basamaklı sayılar elde ederiz. İkinci gruptaki tüm sayıların sonundaki son iki rakamı (yani 52'yi) silersek , iki tane 2'nin yan yana gelmediği 8 basamaklı sayılar elde ederiz. Sonuç olarak a_n 2 tane 2'nin yanyana gelmediği n basamaklı sayıların sayısını gösteriyorsa, $a_{10} = a_9 + a_8$ olur. Aynı şekilde $a_9 = a_8 + a_7$ ve $a_8 = a_7 + a_6$ da gösterilebilir. Bu da Fibanocci dizisinden başka bir şey değildir. $a_1 = 2$ olduğunu göz önüne alırsak $a_1 = 2$, $a_2 = 3$, $a_3 = 5$ ...... $a_{10} = 144$ olur. Aradığımız sonuç 144'tür.

Matematiğin Şaşırtan Yüzü

Fibonacci Sayıları – 2

Her ne kadar doğanın mı matematiği yarattığını yada matematiğin mi doğayı şekillendirdiğini bilemesek de emin olduğumuz bir konu var ki o da bu iki kavramın sımsıkı birlikteliği. Geçen sayıda anlattığımız Fibonacci sayıları ve altın oran, bu birlikteliğin en güzel görülebildiği konuların başında geliyor.





Bu ayki konumuz ise altın dikdörtgenden elde edilen spiralin en iyi matematikçi olan doğa tarafından nasıl kullanıldığı olacak. Geçen sayıyı takip etmiş okuyucular kenarları ardışık iki Fibonacci sayısı olan dikdörtgenlere altın dikdörtgen denildiğini hatırlayacaklardır. Şimdi altın dikdörtgeni oluşturan karelerin içine şekildeki gibi çeyrek çemberler çizerek bir spiral oluşturalım. Çok ilginç bir şekilde, matematiği kullanarak ellerinizle çizdiğiniz bu spirali bir deniz kabuğunda, bir çam kozalağında ve hatta uzaydaki bir gökadada görmeniz mümkün. Bu spirale bir diğer güzel örnek de resimdeki çiçek.

Sadece görüntüsüyle değil matematiğiyle de büyüleyen bu çiçeğin spiralleri çok rahatlıkla seçilebiliyor. Eğer sıkılmadan sağa doğru spirallerini sayacak olursanız çiçeğin 55 spiralden oluştuğunu göreceksiniz. İşte karşınızda yine bir Fibonacci sayısı!

Yeni Yayınlar...

Türk Matematik Derneği'nin yayınladığı "Matematik Dünyası"nın 3. sayısı çıktı. Bu sayının kapak konusu graf adıyla da bildiğimiz çizgeler. Kolay okunabilir dili ile matematik meraklılarına seslenen dergide daha birçok farklı konuda bilgi edinebilir ve matematiğin zevkini çıkarabilirsiniz.