30. ULUSLARARASI MATEMATİK OLİMPİYADININ CEVAPLARI

Prof. Dr. Okay ÇELEBİ*

1) (Aşağıdaki çözüm, yarışmada gümüş madalya kazanan Ümit Kumcuoğlu'na aittir.)

A_i kümelerine, elemanların yerleştirilmesini iki bölümde yapalım :

a) 1 ile 351 = 3 × 117 arasındaki elemanlar;

b) 352 ile 1989 arasındaki elemanlar. Önce (b) kısmındaki elemanları şöyle bir tabloya yerleştirelim :

	A_1	A_2	A_3		A_{116}	A_{117}
4. Sıra:	3x117+1	3x117+2	3x117+3	...	3x117+116	3x117+117
5. Sıra:	4x117+117	4x117+116	4x117+114	...	4x117+2	4x117+1
6. Sıra:	5x117+1	5x117+2	5x117+3	...	5x117+116	5x117+117
7. Sıra:	6x117+117	6x117+116	6x117+115	...	6x117+2	6x117+1
...	...	...	...		...	...
...	...	...	...		...	...
...	...	...	...		...	...
16. Sıra:	15x117+1	15x117+2	15x117+3	...	15x117+116	15x117+117
17. Sıra:	16x117+117	16x117+116	16x117+115	...	16x117+2	16x117+1

Her kümeye yerleştirilen elemanlar $a \times 117 + b$ şeklindedir. Her bir $a \times 117$, $3 \leqslant a \leqslant 16$, bir kümede 1 kez kullanılmıştır. Her kümede 3'den 16'ya kadar olan a'ların her biri mutlaka kullanılmıştır. Dolayısıyla rakamların $a \times 117$'li parçası bütün kümelerde aynıdır. b'ler ise, ardışık sıralarda, artan ve eksilen sayılar olarak dizilmişlerdir. O halde aşikâr olarak, bu kümelerin yukarıdaki tabloya göre yerleştirilmiş kısımların toplamı aynıdır.

Şimdi (a) kısmındaki 1'den 351'e kadar olan elemanları da şöyle dizelim :

	A_1	A_2	A_3	...	A_{58}	A_{59}	A_{60}	A_{61}	...	A_{116}	A_{117}
1. Sıra:	1	2	3	...	58	59	60	61	...	116	117
2. Sıra:	176	177	178	...	233	234	118	119	...	174	175
3. Sıra:	351	349	347	...	237	235	350	348	...	238	236

Bu dizilişe göre,

(i) 1. sıra elemanları $i \in A_i$, $1 \leqslant i \leqslant 117$ olacak şekildedir.

(ii) 2. sıra elemanları $175 + i \in A_i$; $1 \leqslant i \leqslant 59$ ve $58 + i \in A_i$; $60 \leqslant i \leqslant 117$ olacak şekildedir.

(iii) 3. sıra elemanları ise, $235 + 2(59-i) \in A_i$; $1 \leqslant i \leqslant 59$ ve $350-2(i-60) \in A_i$; $60 \leqslant i \leqslant 117$ olacak şekildedir.

O halde, $1 \leqslant i \leqslant 59$ olan A_i'lerin ilk üç sırasının toplamı,

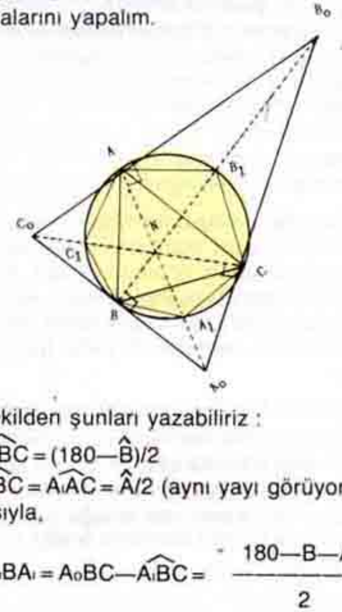
$$i + (175 + i) + [235 + 2(59-i)] = 528$$

ve $60 \leqslant i \leqslant 117$ olan A_i'lerin ilk üç sırasının toplamı,

$i + (58 + i) + [350 - 2(i-60)] = 528$ olur. Böylece (a) kısmına ilişkin olarak elde edilen 3 sıra ile (b) kısmına ilişkin olarak verilen 14 sıranın birleşimi, her bir A_i kümesinde 17 eleman olacak şekilde bir parçalanma tanımlar. 1,2,...,1989 kümesinin bu parçalanmasında elde edilen A_i alt kümeleri ikişer ikişer ayrıktır.

2) (Yarışmada bronz madalya alan Tolga Güney'in çözümü)

(i) Önce $\widehat{ABC} = \hat{B}$, $\widehat{BCA} = \hat{C}$ ve $\widehat{CAB} = \hat{A}$ kısaltmalarını yapalım.



Şekilden şunları yazabiliriz :

$\widehat{A_0BC} = (180 - \hat{B})/2$

$\widehat{A_1BC} = \widehat{A_1AC} = \hat{A}/2$ (aynı yayı görüyor)

Dolayısıyla,

$$A_0BA_1 = A_0BC - \widehat{A_1BC} = \frac{180 - B - A}{2} = \frac{C}{2}$$

bulunur. Öte yandan,

$BA_1A = BCA = C$ (aynı yayı görüyor)

ve

$$BA_0A_1 = BA_1A - A_0BA_1 = C - \frac{C}{2} = \frac{C}{2} \text{ olur.}$$

Yani A_0A_1B üçgeni, ikiz kenardır ve

$$A_1B = A_1A_0 \quad \text{.......................................} \quad (1)$$

dir.

Benzer şekilde,

$$\widehat{BNA_1} = \widehat{ABN} + \widehat{BAN} = \frac{\hat{B}}{2} + \frac{\hat{A}}{2} = \frac{180 - \hat{C}}{2} = 90 - \frac{\hat{C}}{2}$$

dir.

* *ODTÜ, Matematik Böl. Öğr. Üyesi ve TÜBİTAK Olimpiyat Ekibi Hazırlama Grb. Başkanı.*

$$\widehat{NBA_0} = 90 - \frac{\hat{C}}{2} + \frac{\hat{C}}{2} = 90°,$$

$$\widehat{NBA_1} = 90 - \frac{C}{2} = BNA_1$$

yani BA_1N üçgeni ikizkenardır ve

$$A_1B = A_1N \quad \text{.................................} \quad (2)$$

dir.

(1) ve (2)'den

$$A_1N = A_1A_0$$

bulunur. Demek ki, A_1N ve A_1A_0 tabanlarına ait olan yükseklikler eşit olduğundan,

$$S_{BA_1N} = S_{BA_1A_0}$$

ve

$$S_{CA_1N} = S_{CA_1A_0}$$

dır. Aynı şekilde

$$S_{BC_1N} = S_{BC_1C_0},$$

$$S_{AB_1N} = S_{AB_1,B_0},$$

$$S_{AC_1} = S_{AC_1CO}$$

$$S_{CB_1N} = S_{CB_1B}$$

olduğu gösterilebilir. Bulduğu bu 6 eşitliği taraf tarafa toplarsak,

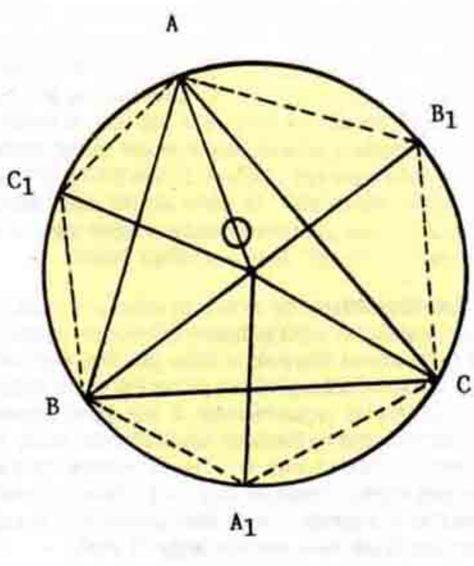
$$S_{AC_1BA_1CB_1} \quad S_{A_0B_0C_0} - S_{AC_1BA_1CB_1}$$

veya

$$S_{A_0B_0C_0} = 2S_{AC_1BA_1CB_1}$$

elde edilir.

(ii) Şekilden, kolaylıkla aşağıdakileri elde ederiz :



$$\widehat{BA_1} = \widehat{A_1C},\ \widehat{BC_1} = \widehat{C_1A},\ \widehat{CB_1} = \widehat{B_1A}$$

ve

$$\widehat{BOC} = 2\hat{A},$$

$$\widehat{BOA_1} = \widehat{COA_1} = A$$

dır. Aynı şekilde

$$\widehat{B_1OC} = \widehat{B_1OA} = \hat{B}$$

$$\widehat{C_1OA} = \widehat{C_1OB} = \hat{C}$$

elde edilir. O halde,

$$S_{BOA_1} = S_{COA_1},\ S_{COB_1} = S_{AOB_1},\ S_{AOC_1} = S_{BOC_1}$$

olduğundan,

$$S_{AC_1BA_1CB_1} = 2\,S_{BOA_1} + 2\,S_{COB_1} + 2\,S_{AOC_1}$$

veya

$$S_{AC_1BA_1CB_1} = R^2 \sin A + R^2 \sin B + R^2 \sin C = R^2 (\sin A + \sin B + \sin C)$$

bulunur.

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$$

bağıntısı kullanılarak,

$$S_{AC_1BA_1CB_1} = R^2\,\frac{a+b+c}{2R} = u.R$$

sonucuna ulaşılır. Euler teoremine göre, bir üçgenin çevrel çemberinin merkezi ile içteğet çemberinin merkezi arasındaki uzaklık d ise,

$$d^2 = R^2 - 2Rr$$

dir. O halde $R(R - 2r) \geqslant 0$ ve $R \geqslant 2r$'dir.
Yani,

$$u.R \geqslant 2r.u$$

ve

$$S_{ABC} = ur$$

olduğundan,

$$S_{AC_1BA_1CB_1} \geqslant 2S_{ABC}$$

bulunur. (i) de,

$$S_{A_0B_0C_0} = 2S_{AC_1BA_1CB_1}$$

elde edildiğinden,

$$S_{A_0B_0C_0} \geqslant 4\,S_{ABC}$$

sonucuna ulaşılır.

Not : Bu soruyu takım elemanlarından Mehmet Aslan ve Ümit Kumcuoğlu da tam olarak çözdüler.

HAYATIN KISALIĞINDAN EN ÇOK YAKINANLAR, ZAMANLARINI EN KÖTÜYE KULLANANLARDIR.

La Bruyére