



# Not Defteri

V u r a l A l t ı n

## Karışık Birimler

Neydi standart temel birimler; metre, kilogram, saniye; yani MKS; kelvin, amper, mol ve mum; yani KAMM?... Bir de radyan ve steradyan var, aç ve katı aç birimleri. Bunlar boyutsuz tabii. İlginç: Boyutlu olan her değişkenin birimi var, doğal olarak; fakat temel birimlerden bazılarının boyutu yok, tuhaf olarak. Molün de yok. Sayı çünkü,  $6.02 \times 10^{23}$  tane; tane boyut olmaz. 12 gram karbon-12 izotopunun içerdiği sayıda temel yapıtaşı içeren madde miktarı; atom, ya da molekül. Büyük sayı ama, Allah için! Gerçi biz hep, atom ya da molekülleri molle ölçeriz, ama başka şeylerin de molü olabilir. Örneğin koyunların: 1 mol koyun, öfff! Dünya kadar koyun, öyle mi acaba? Koyuna... Beli 50 cm diyelim, ince belli, yarım metre; boyu da 1 m olsun, silindirik şekilde; hacmi  $1/2 \text{ m}^3$  olur. Bir de ayakları var: de  $1 \text{ m}^3$ . Dünyanın yarıçapı, ekvator da 6378 km, ortalama 6371 km. Neredeyse küre: hacmi  $(4/3)\pi R_d^3 = 1.08 \times 10^{21} \text{ m}^3$ . Bir o kadar koyun, böl bunu Avogadro sayısına: 0.0018 mol. Bu kadar molekül; suyun molü 18 gram;  $18 \times 0.0018 = 0.0323$  gram suda var, damlacık; bile değil, zerrecik. Bu kadar mol koyun dünyayı dolduruyor, dünya kadar koyun bu kadar mol oluyor. Aralarında ki kütleçekimi sayesinde bir arada dururlardı da. Dev bir koyun salkımı, güneşin etrafında dönüyor: Me..ee! Güneş sistemi inledi melemelerinden: Amma saçma oldu ha; ses boşlukta yayılmaz ki, madde ortamı lazım. Boşlukta yaşayamazlardı zaten; bunlara ot lazım, arazi lazım; oksijen, su... Ona gelene kadar, kütleçekimiyle birbirini ezip magmaya dönerlerdi. Ne kadar zamanda? Diyelim başta, canlı canlı dağıttık, dünyanın hacmine... Ya da, kütleçekimiyle birbirlerini ezmesinler diye onları dünyanın yörüngesi boyunca sıraya dizsek? Homojen olarak, halka şeklinde. Öyle ki herhangi birisi diğerlerini çekip de bir koyun gezegeninin oluşmasına yol açmasın... Dünyanın yörünge yarıçapı 150 milyon km, yörünge çeperi  $2\pi R_y = 942$  milyon km. Metre başına bir koyundan,  $9.42 \times 10^{11}$  koyun eder: tek sıra. Ya  $1.08 \times 10^{21}$  tanesi? Vay canına, yan yana milyarlık sıralar halinde dizmek lazım. Her birine yarım metrelik yer ayırsak, 500 bin km eninde bir şerit olurdu yörünge boyunca. Asteroid kuşağı gibi, koyun kuşağı. Eh, 150 milyon km içinde devede kulak. Saçmalama, neyse! Ama bunlar koyun yerine öküz olsalardı; sayısı daha az; dünyanın kabuğu boynuzlardan oluşur, dış kabuğu; dünya işte o zaman öküzün boynuzları üs-

tünde durdu herhalde. Nereden esti bunlar?... Kurban Bayramı, yakında, ondan herhalde. Ama!... Saçma da görünsen, olsun: 'Peçete üstü, zarf arkası hesapları' deniyor bunlara. Ara sıra yapmak lazım, nicelikler hakkında kabaca fikir edinmek için...

Diğer bütün birimler bunlardan türetiliyor, temel birimlerden. Hız örneğin, konunun zamana göre türevi, yol bölü zaman yani: Birimi m/s. İvmeniniki; hızın hızı, zaman göre türevi, hız bölü zaman: m/s<sup>2</sup>. Birimler bunlar. Ya kuvvet? Kütle çarpı ivmeden,  $F = m \cdot a$ : kg.m/s<sup>2</sup>. Buna newton deniyor. Enerji? E, kuvvet çarpı yol; daha doğrusu kuvvet çarpı yolun kuvvete paralel bileşeni iş olduğuna göre, iş yaparken de enerji harcadığımızı göre: kg.m<sup>2</sup>/s<sup>2</sup>. Buna joule de deniyor. Şimdi: İşin tanımını bilip de, enerjinin biriminde hata yapmak mümkün mü? Değil. İşin ilginç yanı; yani kuvvet çarpı yolun değil, meselenin ilginç yanı; enerji nasıl üretiliyor olursa olsun, birimi aynı. İster bir masayı itekleyerek sürükleye, ister bir direnç üzerinden akım geçir, ister-

nilecek bu birimler çünkü, eşdeğer duyarlılıkta olmaları lazım. Neyse, Amper bu: Amperi bilince yük? Elektrik yükü birimi? Coulomb... Amper neydi, saniyede geçen yük miktarı: coulomb bölü saniye. O halde; bu tellerden birinin kesitine bakarsın, saniyede geçen yük miktarı coulomb oluyor. Yükleri elektronlar taşıyor, onları nasıl sayacaksın? Elektroliz yaparsın canım, çıkan gazın hacmine bakarsın, molekül sayısına. Ya da başka bir 'elektrokimyasal' tepkime...  $6.25 \times 10^{18}$  tane elektron eder... Mol den az. Bir elektronun yükü de  $1.60 \times 10^{-19}$  coulomb oluyor demek ki, çok küçük... E peki, madem amper=coulomb/saniye; niye coulombu temel birim yapmamışlar? Onu temel birim sayıp da, amperi coulomb cinsinden tanımlamamışlar... Yük saymak zor da ondan, akım ölçmek daha kolay. Önce amperi tanımlarsın kuvvet cinsinden, daha kolay ölçülür; sonra coulombu onun cinsinden... Dolayısıyla, coulomb eşittir amper çarpı saniye, temel birimler cinsinden: C=A.s.

$$(4/3)\pi R_d^3 = 1.08 \times 10^{21} \text{ m}^3$$

sen de su dolu bir kabın altında ateş yakıp suyu ısıt: Hepsinin birimi aynı ve joule... Bu da; farklı tür enerjilerin mikroskopik ölçekteki belirti biçimlerinin hep aynı olduğuna işaret ediyor... Haa; şeyi tanımlamadık, amperi; akım birimi, o neydi? Paralel iki telden akım geçirdiğimizde; akımlar aynı yöndeysen, teller birbirini iter; ters yöndeysen çeker. Buna dayalı, amperin tanımı: Kesit alanı ihmal edilebilecek kadar küçük olan sonsuz uzunluktaki paralel iki iletkenin, boşlukta iken her ikisinden de geçirilmesi halinde teller arasında metre uzunluk başına  $2 \times 10^{-7}$  newton'luk itme veya çekme kuvvetine yol açan akım. Pek kullanışlı görünmüyor; kesitler sıfıra yakın, uzunluk sonsuz. Ama bir laboratuvarında, bu ideal tanıma istendiği kadar yaklaşılabilir. İletkenleri, gerekiyorsa daha da inceltip, daha da uzatarak. Zaten şey; mükemmel bir ölçüm istemiyoruz ki, diğer birimlerin de 'ölçüm duyarlılığı' sınırlı. Şimdi bazı birimleri, diyelim milyarda bir duyarlılıkla belirlemişken; örneğin saniyeyi sezyum saatiyle veya metreyi ışık hızı aracılığıyla; bir diğerini trilyonda bir duyarlılıkla belirlemeye çalışmak anlamsız. Gereksiz yani, birlikte kulla-

Gelelim gerilime, birimi ne?... Gerilim, iki nokta arasındaki potansiyel enerji farkı. Yerçekimindeki yükseklik farkına benziyor. Nasıl ki bir yokuşu tırmanırken enerji harcaıyıp, potansiyel enerji kazanıyor; inerken de tam tersine, yuvarlanırsak eğer, potansiyel enerjimiz azalırken kinetik enerji kazanıyorsak... Yükler de, elektrik gerilimine karşı hareket ederken öyle... Bir volt öyle bir gerilim ki; üzerinden geçirilen her coulomb yük, 1 joule enerji, ya kazanıyor ya kaybediyor; yükün işaretine ve hareket yönüne bağlı olarak. Örneğin 1 voltluk bir pil, kutupları arasında bir iletken bağlanıp kısa devre yapılırsa; niye, ama yapılırsa ve pilin ekisi kutbundan artı kutbuna 1 coulomb eşdeğeri  $6.25 \times 10^{18}$  tane elektron geçse, bu elektronlar; gerilimin bu sırada hep aynı kaldığı varsayımıyla, 1 joule kinetik enerji kazanırlar. Ya da elektron başına elektronvolt, eV; faydalı bir başka enerji birimi. Tabii; bu enerji ya telin direnci nedeniyle telin üzerinde, ya da pilin iç direnci yüzünden pilin içerisinde ısıya dönüşür, sonuç olarak zıyan olur. Kısa devre yapılan piller bu yüzden ısınır filan. Neyse! Volt ne oluyor şimdi: coulomb başına joule, joule bölü cou-

# Not Defteri

lomb. Joule neydi:  $\text{kg.m}^2/\text{s}^2$ . Columb: A.s. O halde:  $V=\text{kg.m}^2/\text{A.s}^3$ , temel birimler cinsinden... Hmm; elektronlar niye hızlanıyorlar ki, iletken üzerinde; onları itip kakan mı var? Var tabii, elektrik alanı, birim yük başına kuvvet. Yol boyunca var; iletkenin dış yüzeyinde, elektronlar yüzeyinden akıyor. Yol burada, iletkenin uzunluğu... Peki; birim yük başına kuvvetin birimi ne, elektrik alanı E'nin?... Tamam; newton bölü coulomb da, bu ne oluyor,  $\text{kg.m}/\text{s}^2.\text{C}$ ; gerilim cinsinden?... Şimdi; volt; birim yük başına enerji, yani kuvvet çarpı yol bölü yük olduğuna göre; volt bölü yol, kuvvet bölü yük oluyor. Yani E'nin birimi  $V/m$ . V neydi:  $\text{kg.m}^2/\text{A.s}^3$ . O halde, E'nin birimi, temel birimler cinsinden:  $\text{kg.m}/\text{A.s}^3$ . Ya direnç birimi? Ohm: Üzerinden 1 amperlik akım geçerken 1 voltluk gerilime yol açan, ya da uçları arasına ki gerilim 1 voltken üzerinden 1 amper akım geçiren direncin büyüklüğü:  $R=V/I$ 'dan... Yani  $\Omega= \text{kg.m}^2/\text{A}^2.\text{s}^3$ , keza temel birimler cinsinden. Fena değil, işler iyi gidiyor. Böyle devam ediyor işte; endüktans, manyetik akı vs. Buraya kadar zar zor getirdik, daha fazla kafa karıştırmayalım. Daha ilginç bir şey var çünkü, ona bakalım...

Biz karmaşık iki birimi çarparken ne yapıyoruz: İçerdikleri temel birimlerin karşılıklı üslerini topluyoruz, örneğin kuvvet çarpı yolda,  $(\text{kg.m}/\text{s}^2).(m)=\text{kg.m}^2/\text{s}^2$  şeklinde. Karmaşık birimlerin bazen de kuvvetini alıyoruz. Nasıl: İçerdiği temel birimlerin üslerini, bu kuvvet sayısı ile çarparak. Örneğin diyelim, kuvvetin, her ne işe yarayacaksa; ikinci kuvveti:  $(\text{kg.m}/\text{s}^2)^2=(\text{kg}^2.\text{m}^2/\text{s}^4)$  oluyor. Şimdilik sadece m, kg ve s'yi içeren karmaşık birimleri düşünüp, her birini illa da bu üçünün, illa da bu sıradaki üslerinin çarpımı şeklinde yazıyor olalım. Örneğin,  $\text{kg.m}/\text{s}^2$  olan kuvvet birimini  $m^1.\text{kg}^1.\text{s}^{-2}$ ; yol birimi metreyi de  $m^1.\text{kg}^0.\text{s}^0$  şeklinde. Ki üsleri toplamak daha kolay olsun:  $(m^1.\text{kg}^1.\text{s}^{-2}).(m^1.\text{kg}^0.\text{s}^0)=(m^{1+1}.\text{kg}^{1+0}.\text{s}^{-2+0})=(m^2.\text{kg}^1.\text{s}^{-2})$ . Hatta; m, kg, s sembollerini oradan oraya taşıyıp durmak yerine, karmaşık birimleri sadece, barındırdıkları temel birim üslerinin keza sıralı üçlüleri şeklinde de gösterebiliriz. Yine örneğin kuvveti,  $(m^1.\text{kg}^1.\text{s}^{-2})\rightarrow(1,1,-2)$  ve yolu,  $(m.\text{kg}^0.\text{s}^0)\rightarrow(1,0,0)$  ile... İki karmaşık birimi çarpmak, bu birimlere karşılık gelen üçlüleri toplamaktan ibaret oluyor:  $(m^1.\text{kg}^1.\text{s}^{-2}).(m.\text{kg}^0.\text{s}^0)=(m^2.\text{kg}^1.\text{s}^{-2})\rightarrow(1,1,-2)+(1,0,0)=(2,1,-2)$ . Karmaşık bir birimin üssünü almak da, karşılık gelen üçlüyü kuvvet sayısı ile çarpmaktan:  $(m^1.\text{kg}^1.\text{s}^{-2})^2=(m^2.\text{kg}^2.\text{s}^{-4})\rightarrow2.(1,1,-2)=(2,2,-4)$ ...

Bu gösterimin sağladığı bir kolaylık daha var. Herhangi bir karmaşık birim, örneğin  $(u,v,y)$ ;  $(1,0,0)$ ,  $(0,1,0)$  ve  $(0,0,1)$  üçlülerini cinsinden yazılabilir:  $(u,v,y)=u.(1,0,0)$

$+v.(0,1,0)+y.(0,0,1)$ ... Yalnız, analitik türetimlerde fiziksel değişkenlerin, dolayısıyla da karmaşık veya temel birimlerin, sadece rasyonel üsleri alınıyor; tamsayı üsler veya aralarında asal p ve q tamsayılarının p/q oranı gibi üsler. Örneğin, h yüksekliğinden düşen bir cismin hızını veren  $v=(2.g.h)^{1/2}$  ifadesinde, g ile h'nin birimlerinin çarpımının karekökü alınıyor; üsler 1/2 ile çarpılıyor. Bunun da küpünü al istersen:  $3/2$  örneğin. Dolayısıyla genel olarak, temel ya da karmaşık herhangi bir birimin,  $(u,v,y)$  gösterimindeki u,v,y değerleri rasyonel sayılardan oluşmak zorunda. Öte yandan, böyle herhangi bir rasyonel sayılar üçlüsü, bir birime karşılık geliyor:  $(u,v,y)\rightarrow m^u.\text{kg}^v.\text{s}^y$  Oh iyi! Yani öyle bir durum var ki elde;  $(1,0,0)$ ,  $(0,1,0)$ ,  $(0,0,1)$  üçlülerini, olası tüm rasyonel sayı üçlülerine eşleştirerek çarpıp topladıktan, yani tüm doğrusal kombinasyonlarını aldıktan sonra bir çuvala doldursak... Vay canına! Bir vektör uzayı yakalamış oluyoruz: Temel vektörleri  $(1,0,0)$ ,  $(0,1,0)$ ,  $(0,0,1)$  üçlülerinden oluşan, rasyonel sayılar kümesi (alan) üzerine inşa edilmiş olan bir vektör uzayı!... Çünkü, bu çuvaldan herhangi iki  $b_1$  ve  $b_2$  elemanı çıkarsak, rasyonel sayılar kümesinden de herhangi iki  $r_1$  ve  $r_2$  sayısı seçip, doğrusal kombinasyon alsak, sonuçta elde edilen  $r_1.b_1+r_2.b_2$ , bu çuvalda mutlaka vardır...

Tabii, kendimizi m, kg, s ile sınırlamak zorunda değiliz. Elimizde 6 tane boyutlu temel birim bulunduğuna göre, 6 boyutlu bir birimler uzayı kurabiliriz: Her noktası bir birim. Yalnız, bu; vektörlerinin bileşenleri arasında irrasyonel sayılar olmadığından, reel uzay gibi sürekli bir uzay değil. Birimler uzayı: vay vay vay! Peki ne işe yarar böyle bir uzay? Boyut analizinde çok işe...

$$\Omega = \text{kg.m}^2/\text{A}^2.\text{s}^3$$

Bazen bir fiziksel olayla ilgili olarak peşinde olduğumuz değişkenin, diğer hangi değişkenlere bağlı olması gerektiğini biliriz de; ne şekilde bağlı olması gerektiğini bilmez. Örneğin bir akışkanın, diyelim havanın, yani rüzgarın; yolu üzerindeki bir cisme uyguladığı 'sürüklenme kuvveti' ('drag') nelere bağlı? Bir kere rüzgarın süratine (v) bağlı olmalı. Keza; cismin rüzgara karşı, rüzgarın hızına dik olarak sunduğu kesit alanına da (A)... Öte yandan, rüzgarın etki ettirdiği kuvvet, ne de olsa cisme çarpan hava moleküllerinin aktardığı momentumların bir sonucu olduğuna göre; havanın yoğunluğu ( $\rho$ ) da önemli. Başkaca bir et-

ken akla gelmiyor. Dolayısıyla, havanın sürüklenme kuvveti  $F_D$ ;  $\rho$ , A ve v'nin bir fonksiyonu olmak zorunda:  $F_D=f(\rho,A,v)$ . Bu f nasıl bir fonksiyon, şekli ne?... Boyut analiziyle bulabiliriz. Fonksiyon f'nin içerisinde;  $\rho$ , A ile v, ya da bunların kuvvetleri toplamı çıkartılıyor olamaz: Eşitliğin iki tarafındaki birimler tutmaz çünkü. Olsa olsa, kuvvetleri birbirleriyle çarpılıyordur. Diyelim  $\rho$ 'nun kuvveti x, A'nınki y, v'ninki de z...

İlgili değişkenlerde sadece MKS birimleri geçtiğine göre, kendimizi yine bu birimlerin üç boyutlu uzayıyla sınırlayalım. Bu uzayda;  $\rho$ , A ve v'nin; sırasıyla  $\text{kg}/\text{m}^3$ ,  $\text{m}^2$  ve  $\text{m}/\text{s}$  olan birimlerine karşılık gelen vektörler, yine sırasıyla;  $(-3,1,0)$ ,  $(2,0,0)$  ve  $(1,0,-1)$ . Bunların, sırasıyla; x, y, ve z kuvvetlerinin çarpımına karşılık gelen vektör;  $x.(-3,1,0)+y(2,0,0)+z.(1,0,-1) = (-3x+2y+z, x, -z)$  olur. Bunun, kuvvet birimi  $\text{kg.m}/\text{s}^2$ 'ye karşılık gelen,  $(1,1,-2)$  vektörüne eşit olması lazım. Yani:  $(-3x+2y+z, x, -z)=(1,1,-2)$ . Ki bu bize;  $-3x+2y+z=1$ ,  $x=1$ ,  $z=2$  denklemlerini verir. Çözümü kolay; x ve z belli zaten, y ise ilk denklemden  $y=(1+3x-z)/2=(1+3-2)/2=1$  olarak bulunur. Kısacası,  $x=1$ ,  $y=1$ ,  $z=2$  olduğuna göre, formül şu:  $F_D=C.\rho.A.v^2$ . Aradaki C ise bir sabit. Boyut analizi onu veremiyor, onun deneylerle saptanması lazım.

Genelde böyle; bir y fiziksel değişkenini, diğer, diyelim n tane  $x_i$  değişkeni cinsinden yazarak,  $y=f(x_1, x_2, \dots, x_n)$  ifadesini boyut analiziyle çözmek istediğimizde;  $x_i$ 'lerin üsleri, n tane bilinmeyen oluyor. İfadede geçen boyutlu temel birimlerin sayısı m kadar, yani en fazla 6 tane de denklem var. Bu n bilinmeyenli m denklem, matris yöntemleriyle kolayca çözümlenip, katsayı matrisinin köşegenleştirilmesi yoluyla; n-m tane boyutsuz parametre cinsinden yeniden ya-

zılabilir. Hem de bu boyutsuz parametreleri, eldeki değişkenler cinsinden hesaplamak mümkün: Buckingham- $\pi$  theorem. Akışkanlar dinamiğinde çok kullanılıyor bu. Benzetişim ('simülasyon') çalışmalarında. Neyse! Birimlerle ilgili olarak mutlaka dikkat edilmesi gereken bir husus var... Bir biriyle toplanan ya da birbirinden çıkartılan ifadelerin birimlerinin aynı olması lazım: Aksi halde elmalarla armutları topluyor, ya da birbirinden çıkartıyor oluyoruz. Birbirine eşitlenen ifadelerin de keza, birimlerinin aynı olması gerekir: Aksi halde elmalarla armutları birbirine eşitliyor oluyoruz. Gelelim doğanın birimlerine...