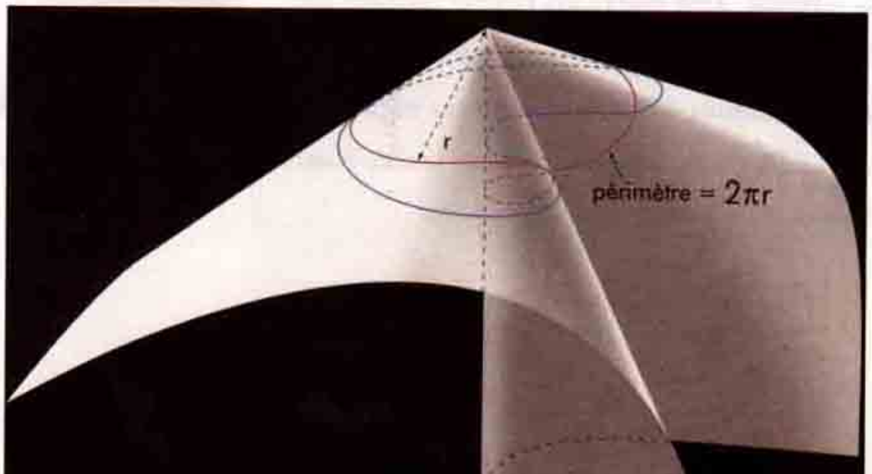
Hooke, Laplace, Gauss ve Sıradan Bir Bilgisayar...

Bir Buruşuk Kâğıdın Anatomisi

Buruşturulup atılmış bir kâğıt, tıpkı şiddetli bir çarpışmaya uğramış bir araba gibi, çok büyük oranda eski haline tekrar dönüştürülemez durumdadır. Yüzey geometrisi ve elastisite (esneklik) teorisi geliştikçe bu olgu da aydınlığa kavuşmuş ve bu sayede deformasyonun türü de tanımlanmaya başlanmıştır.

Bir kâğıdın ya da ince saç bir levhanın deformasyonu neden kırışıklıklar bırakır? Ve neden diğer bazı tip deformasyonlar (örneğin; bir sigara kağıdının rulo hale getirilmesi) hiç iz bırakmadan kaybolurken, buruşturma tipi deformasyonların kırışıklıkları kalıcıdır? Bu soruların cevapları, bilimde iki farklı alanı bir araya getirir; elastisite teorisi ve yüzeyler geometrisi. Kalıcı kırışıklıklar, kâğıt, kumaş, saç gibi malzemelerin esneklik sınırı aşıldığında ortaya çıkar. Kırışıklık bölgesinde ortaya çıkan büyük bir lokal zorlama nedeniyle, malzeme deforme olur ve düzgün yapısı bir daha düzeltilemiyecek şekilde bozulur Böyle bir kâğıdın mikroskop altındaki görüntüsünün bize verdiği şey, kırışıklıkların olduğu yerde selüloz liflerin kırılmaları ya da birbirlerinden ayrılmalarıdır. Bu tersinir olmayan mikroskobik olayın analizi aslında son derece karmaşıktır. Bazı maddelerin dayanıklılığını öngörmek ve bu maddelerin kırışıklığa geçme sınırını ölçmek oldukça zordur. Son zamanlarda, levhaların deformasyonu üzerinde yoğunlaştırılan çabalar bizi klasik yüzey geometrisinin çok ilginç fikirlerini alışılmamış kalıplarda uygulamaya itmiştir. Yüzey geometrisi, 19. yüzyılın ilk yarısında Pierre Simon Marquis de Laplace ve Carl Friedrich Gauss'un büyük katkılarıyla doğmuştur. Laplace, belirli bir sınırla sınırlanan ve en az alana sahip olan (genellikle bu sorun plato problemi diye anılır) yüzeyin ne olması gerektiğini ilk saptayan kişidir. Halka şeklindeki herhangi bir çerçeveyi sabunlu suya sokup, çıkardığınızda oluşan ince sabun tabakası, böyle bir yüzeye iyi bir örnektir. Gauss'a gelince, onun bir yüzeyi bir düzlem üstüne genleştirmeden ya da daraltmadan yayabilmenin koşulunu bulmuş olduğu görülür. Bulgusundan çok memnun kalan Gauss, teoremine *Teorema egregium* yani kayda değer teorem adını vermiştir. Teorema egregium, bir yüzeyin Gauss eğriliği sıfır ise, onun uzunluklarını değiştirmeden bir düzlemle çakıştırılabileceğini iddia eder. Bir küreyi bir sayfa ile kaplamaya çalıştığımızı düşünelim. Deney bize bu işin kağıdı birkaç yerinden buruşturup yaparsak pek de zor olmadığını gösterir. Buna karşılık bir silindiri aynı kâğıtla kaplamak çok daha az çaba gerektirir. Bu durum, kürenin sıfır olmayan bir Gauss eğriliğine sahip olması ve silindirin ise her noktasında Gauss eğriliğinin sıfır olması ile açıklanabilir. Haritacılık aslında bu farklılığın iyi bir açıklayıcısı olabilir; yerkürenin düzlemsel bir haritası çizilmek istendiğinde, kutuplardaki bölgeler öteki bölgelere göre indirgenmiş bir ölçekle gösterilmek zorunda kalınır.



Bir kâğıt büküldüğünde, en düşük elastisite enerjisine sahip yeni şeklini alır. Deformasyon, özel bir konide -açınabilen koni- şeklinde gerçekleştirilir. Burada sözü edilen koni, tepe noktasından uzaklıkları r olan noktaların çevresi $2\pi r$ olan bir eğri veren, bir tarafı içbükey ve bir tarafı da dışbükey olan bir yüzeye sahip konidir. Böyle bir koni, daire tabanlı bir koninin tersine, yırtılmaya uğramaksızın kolayca yüzeye yayılabilir.

Geometriden sonra şimdi gelelim esnekliğe; Newton'un çağdaşı ve rakibi Robert Hooke, bu kavramın basitleştirilmiş bir çeşidini ilk defa 1678'de Latince bir isimle ortaya atmıştır;"kuvvet-burada direnç-yer değişimi ile orantılıdır" anlamına gelen Ut tensio sicvis ya da kısaltılmış adıyla "ceiiinosssttun". Buradaki ana fikir, katı cisimdeki elastik kuvvetlerin onun maddesel noktaları arasındaki uzaklıklarının değişmesinden kaynaklandığıdır. Bunu bir kristal üzerinde anlamak kolaydır. Denge konumunda atomlar düzgün bir ağ oluştururlar ve birbirlerine eşit uzaklıklardadırlar. Bu ağsı yapıyı sıkıştırarak atomlar arasındaki uzaklıkları kısaltırız. Ancak, kristali sıkıştırılmış halde tutabilmek için atomlara bir dış kuvvet uygulanmıştır. Bu yüzden, dengedeki konumlarına tekrar geri dönme eğilimindedirler.

Şekil 1- Bir kâğıdın bu şekilde buruşturulması, elastisite kuvvetini azaltmak içindir.

Elbetteki esneklik ve yüzey teorisi arasında bir bağ kurulacaktır. Buna göre, ince bir levhayı deforme ederken eğer uzunlukları değiştirmiyorsak, onun esneklik enerjisini en düşükte tutuyoruz demektir. Şimdi bir düzlemi, açınabilen bir yüzeye (Gauss eğriliği her yerde sıfır olan bir yüzeye) taşıyalım (bir kâğıdın bir silindire sarılmasında olduğu gibi). Böyle bir deformasyon karşısında son derece ince bir levha da esneklik kuvvetleri hemen hemen sıfırdır. Gerçekte, levhanın kalınlığı tam olarak sıfır olmadığı için, iç yüzeylerde sıkışma, dış yüzeylerde ise genleşme olması nedeniyle meydana gelen basınç ve çekme kuvvetleri çok küçüktür.

Yüzeyi, belirli bir hacim (kâğıdın avuç içinde buruşturulması gibi) içinde tutmaya çalışmak yerine, onu verilen bir eğriyi kaplamaya zorlayalım ya da daha iyisi, "Verilen bir eğri açınabilir bir yüzeyin bir parçası olabilir mi?" sorusundan hareket edelim. Yaklaşık bir buçuk yüzyıl boyunca, Laplace'ın minimum yüzey alan problemi araştırma konusu olurken, bir eğri ile sınırlanan açınabilir yüzey problemi aynı derecede ilgi çekici olamamıştır. Bu problem bizi ilginç fikirlere götürür. Önce, bu yüzeyin uymak zorunda olduğu bir eşitlik kurabiliriz. Bir sonraki aşama ise, bir bilgisayar yardımıyla bu eşitliği sayısal olarak belirli bir sınır eğrisi için çözmektir. Elde edilen sayısal sonuç ise felaket (catastrophes) teorisine dayanır ve eğrinin birtakım simetriler gösterdiğini ve bu yüzden de birçok çözümü olduğunu söyler. Bunlar arasındaki fark çok azdır, ama eğri deforme edilip simetrisini kaybettiğinde, bu yüzeylerin bazıları başlangıçtaki geçerliliklerini, çözüm uzayındaki matematiksel tekilliklerden dolayı kaybederler. Bu durumda, Gauss mantığından hareketle, açınabilen yüzeyler için elastik deformasyon enerjisinin en aza indirilmesi ile ilgili başka yollar aranmalıdır. Elde edilen çözüm ise d- konisi (açılabilen) diye adlandırdığımız yüzeyleri içermektedir.

Koni, tek bir noktadan çıkan ve bir düzlem üzerindeki kapalı bir eğriden geçen yarı doğrulardan meydana gelir. Kâğıttan bir koni yapabilmek için, daire sektörü şeklinde bir parça kesmek ve kesik kenarlarını birbirine yapıştırmak yeterlidir. Genel olarak, herhangi başka bir koni, Gauss eğriliği tepe noktası hariç her yerde sıfır olmasına karşın, önemli ölçüde deforme edilmeksizin bir düzleme açınlanamaz. Fakat aynı şey bir kağıdı kesmeden elde edebileceğimiz bir d-konisi için geçerli değildir. Herhangi bir koni gibi, açınabilen koni de bir taban eğrisine sahiptir; ama, bu tabanın özelliği, düzlemdeki ve konideki uzaklıkları denkleştirebilen içbükey ve dışbükey parçalara sahip olmasıdır.

Gauss Eğriliği

Bir yüzey bir noktasında kendisine dik düzlemlerle kesildiği zaman, ortaya çıkan ara kesit eğrileri, yarıçapı R olan daire parçaları ile temsil edilebilir. Bu düzlemlerden iki tanesinde R_1 ve R_2 yarıçapları en küçük ve en büyük değerini alır. Yüzeyin o noktadaki Gauss eğriliği(ve ya toplam eğriliği) $1/(R_1 R_2)$ ile tanımlanır. Bu eğriliğin sıfır olması için R_1 ve R_2 yarıçaplarının en az birinin sonsuz olması gerekir, silindirde olduğu gibi.Eğer ikisi de sonsuz ise yüzey bir düzlemdir.

Basit deformasyon; Gauss eğriliği, tepe noktası dışında her yerde sıfır olan konik yüzey;

Açınabilen koni, gerilme ya da yırtılma olmadan bir düzlem üzerine yayılabilen bir yüzeydir. Buna karşılık teğet düzlemi tanımlanamayan tepe noktasında Gauss teoremi koşulunu sağlayamaz. Bu koşullarda theorema egregium'un yerini başka bir koşul alır; tepe noktası merkez olmak üzere koni üzerine çizilen, yarıçapları r olan daireler (aynen bir düzlemde olduğu gibi) $2\pi r$'ye eşit bir çevreye sahiptir (dairesel tabanlı bir konide bu çevre $2\pi r$'den küçüktür). Bu duruma, kuvvetin yoğunlaştığı ve esneklik sınırını kolayca aştığı konik noktalarda rastlanır. Bütün bu çalışmalar göstermiştir ki, kâğıt buruşturulduğunda açınabilen konilerden oluşan bir yüzey verecek şekilde deforme olarak, elastik kuvvetleri en aza indirger. Aslında iyi incelendiğinde sorunun sıradan bir buruşukluk olayından biraz daha farklı ve günlük deneyimlerle uyumlu olduğu anlaşılır. Buna göre, buruşuk bir kâğıt, tepe noktaları bütünüyle çokgensel bir ağ üzerinde olan kırışıklıklarla birbirine bağlı d- konilerinden meydana gelir.

Bu sonuç, doğal olarak yapıların dayanıklılığının incelenmesi çalışmalarında yerini almıştır. Örneğin, araçların çarpışma anındaki dayanıklılığını artırmak için, onlara olabildiğince eğriliği çok bir şekil verilmelidir. Sert darbeler karşısında daha az buruşmaya uğramak bakımından, açınabilen koni, düzlemden ve yuvarlak yüzeylerden daha elverişlidir.

Amar, M. B. Pomeau, Y. *La recherche*, Aralık 1995
Çeviri: Elif Yılmaz