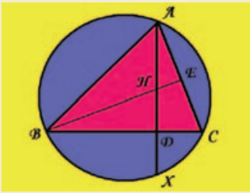
Engin Toktaş
matematik_kulesi@yahoo.com

İki Doğru Dik mi?



Okuyucularımızdan sürekli geometri sorularına daha fazla yer ayırmamız yönünde istekler geliyor. Biz de elimizden geldiğince bu isteklerini karşılamaya çalışıyoruz. İşte karşınızda güzel bir geometri sorusu: Öncelikle bir ABC üçgeni alalım. Daha sonra D noktası BC üzerinde olacak şekilde AD yüksekliğini çizelim ve bu doğrultunun çemberi kestiği noktaya X diyelim. Şimdi de AD üzerinde HD = DX olacak biçimde bir H noktası alalım. Böyle bir durumda BH doğrusunun AC'ye dik olduğunu gösterebilir misiniz?

Sadık Dost

Bu soruda bilgisayar, hesap makinesi gibi modern aletleri bir kenara bırakıp insanoğlunu asırlar boyu bilim yolculuğunda yalnız bırakmayan sadık dostumuz pergelden yardım alacağız. Verilen m doğrusu ve bu doğru üzerinde bulunmayan bir P noktasını kullanarak, sadece pergel yardımıyla P'den geçen ve m doğrusuna paralel olan doğruyu bulmanız mümkün. Acaba nasıl?

Aralarında Asal

Asal sayılar, ne yapıp edip bir yolunu buluyor ve nerdeyse her sayıda sayfamıza bir şekilde girmeyi başarıyorlar. Ama bu sefer aralarında asal olan bir sayı söz konusu. "Ardışık 10 tamsayıdan en az biri geri kalan dokuz sayı ile aralarında asaldır." Sizden istediğimiz bu yargının doğru olduğunu ispatlamanız.

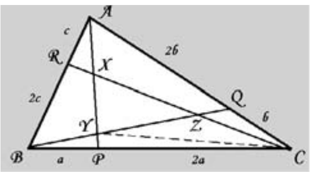
$$S = 10^{10^1} + 10^{10^2} + 10^{10^3} + \dots + 10^{10^{10}}$$

Üssün Üssü

Şekildeki kule gibi dizilmiş üslü sayıların toplamı sonucunda meydana gelen S sayısının acaba 7 ile bölümünden kalan kaçtır? (Üssün üssü olan ifadede parantez kullanılmadığı için $10^1 = 10$, $10^2 = 100$ şeklinde algılanmalıdır.)

Geçen Ayın Çözümleri

Kaçta Kaçı?



Doğru birim alanları seçerek amacımız A(XYZ)'nin tüm alana oranını bulmak. Bunun için A(BPY)=k ve A(ABC)=3 olarak seçelim. Kenar oranlarını dikkate alarak A(CPY) = 2A(BPY) = 2k yazabiliriz. Öte yandan A(BCQ) tüm alanın 1/3'ü olduğu için A(CYQ) = 1- 3k olur. 2 kat alana sahip olan A(AYQ) da 2-6k'ya eşit olur. O halde A(ABY) = 2 – (2-6k) = 6k'dır. Yani 1-k = 6k olur ki bu da k=1/7 demektir. Benzer şekilde A(ARX) = A(CQZ) = 1/7 olduğunu kolaylıkla bulabiliriz. A(XYZ) = A(AYQ) – A(AXZQ) = (2-6/7) – (1-2/7) = 3/7 = A(ABC)/7.

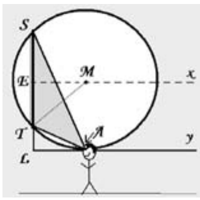
Matematikçi Gözüyle Dart

Sorunun çözümünde yapmanız gereken tek şey verilen isabet olasılıklarını göz önüne alarak tüm sayılar için şöyle bir hesap yapmak: Örneğin biraz açgözlü davranıp 20 sayısına nişan alalım. Bu durumda ya %50 olasılıkla 20'yi vuracağım, ya %25 olasılıkla 5'i ya da yine %25 olasılıkla 1'i vuracağım. O halde kazanacağım ortalama sayı = 0.5*20 + 0.25*5 + 0.25*1 = 11.5. Oysa tüm sayıları hesapladığımızda göreceğiz ki 7 sayısına nişan alırsak kazanılacak sayı = 7*0.5 + 16*0.25 + 19*0.25 = 12.25 olur ve bu ulaşabileceğimiz en yüksek değerdir. (Not: isabet oranları değişirse en uygun sayı da değişir)

Faktöriyel Sayı Avı

Öncelikle 7! = 5040 > 1000 olduğu için a, b, c rakamlarından hiçbiri 6'dan büyük olamaz. Rakamlarından hiçbiri 6'ya da eşit olamaz. Çünkü 6! = 720 olduğundan abc ≥ 720 olur ve rakamlarından en az biri 7 olmalıdır. Bunun mümkün olmadığını biraz önce söyledik. Geriye kalan 0, 1, 2, 3, 4, 5 rakamlarını ve faktöriyellerini kullanarak yapacağınız birkaç denemeden sonra problemin tek çözümünün 145 = 1! + 4! + 5! Olduğunu görebilirsiniz.

En Uygun Yer



Şekilde y ile gösterilen yatay çizgi ziyaretçinin yerden 1,5 metre yükseklikteki gözünün tüm olası pozisyonlarını temsil ediyor. ST doğru parçası ise duvara asılı 6m yüksekliğe sahip o muhteşem sanat eserimiz. Öyle bir A noktası arıyoruz ki TAS açısı maksimum olsun. Şimdi S ve T noktalarından geçen ve y doğrusuna teğet olan bir çember çizelim. Çözümün çember ile doğrunun kesiştiği A noktası olduğunu iddia ediyoruz. Çünkü bu nokta dışındaki y doğrusu üzerindeki tüm noktalar çemberin dışındadır ve S ve T noktaları ile birleştirildiklerinde açı değeri daha küçük olmaktadır. Resmin en alt kenarı yerden 3,5m yüksekte olduğuna göre TL = 3,5 – 1,5 = 2m'dir. ET = 6/2 = 3m iken ETM Pisagor üçgeninden EM = 4m olur. EM = AL olduğuna göre sanatseverin duvardan 4 metre uzaklıkta durması gerekir.

Matematiğin Şaşırtan Yüzü

Mükemmel Sayılar

Kuşadası'ndan gözle görülebilecek kadar Anadolu'ya yakın olan Sisam adasında doğmuş bir filozofu ve onun "mükemmel" bir çalışmasını bu ay köşemizde konuk ediyoruz. İşte karşınızda Pisagor ve mükemmel sayılar!

Sisam adasında doğmasına rağmen filozofların ortak kaderi olan baskı ve zulüm sonucu İtalya'ya göç eden Pisagor, matematik dünyasına buradan sayısız şaheserler kazandırdı. Bu buluşların çoğu kendisi tarafından bizzat kurulan ve "Pisagor Kardeşliği" adı verilen 600 kişilik bir birliğin ortak çabalarıyla keşfedildi. Okulun her üyesi bu kardeşliğe katılabilmek için, matematik buluşlarının hiçbirini dış dünyaya açıklamayacağına dair ant içmek zorundaydı. Hatta Pisagor'un ölümünden sonra bile, bir kardeşlik üyesi yeminini tutmadı diye suda boğularak öldürülmüştü. Kısa zamanda okuldan çok bir din birliğine dönüşen bu grup sayılara adeta tapıyordu. Sayıların sonsuzluğu içinde kardeşlik, özel bir öneme sahip olanları özellikle aramıştı. Bu özel sayılardan bazıları da "mükemmel" denilenlerdi.

Pisagor'a göre sayısal mükemmellik bir sayının bölenleri ile ilgiliydi. Mesela en önemli ve ender olan sayılar bölenlerinin toplamı kendisine eşit olan sayılardır. İşte bu sayılara mükemmel sayılar deniyor. 6 sayısı bir mükemmel sayıdır çünkü bölenlerinin toplamı kendisini verir: 1+2+3 = 6. Bir sonraki mükemmel sayımız 28'dir: 1+2+4+7+14 = 28. Sayma sayıları büyüdükçe mükemmel sayıları bulmak da gittikçe güçleşir. Üçüncü mükemmel sayı 496, dördüncü mükemmel sayı ise 8128'dir. Tabi mükemmel sayıların yetenekleri sadece bölenleri toplamı olmasıyla sınırlı değildir. Örneğin mükemmel sayılar daima birbirini izleyen bir dizi sayma sayısının toplamına eşittir. Bunu aşağıdaki birkaç örnekle açıklayalım:

6 = 1+2+3
28 = 1+2+3+4+5+6+7
496 = 1+2+3+...+30+31
8128 = 1+2+3+...+126+127

Pisagor'dan 200 yıl kadar sonra Öklit bu mükemmel sayıların bir özelliğini daha keşfetti. Tüm mükemmel sayılar iki çarpana ayrılabiliyordu. Bulardan bir tanesi ikinin kuvveti iken diğeri ikinin bir sonraki kuvveti eksi 1'di.

$6 = 2^1 \times (2^2-1)$,
$28 = 2^2 \times (2^3-1)$,
$496 = 2^4 \times (2^5-1)$,
$8128 = 2^6 \times (2^7-1)$.

Bu yöntemi kullanan modern çağın bilgisayarları 130.000'den fazla basamağı olan mükemmel sayıları keşfetmeyi başardılar. Mükemmellikleriyle günümüzde dahi insanları etkilemeyi başaran mükemmel sayıların hala birbirinden ilginç özellikleri keşfedilmektedir.