Özgür Kişisel

Uğur Böcekleri

9x9 bir dama tahtasının her karesinde bir uğur böceği bulunuyor. Saat 12:00'da böceklerin her biri 4 ana yönden birini seçerek o yönlerde 1, 3, 5 ya da 7 kare ilerledikten sonra duruyor (ve bu hareketinin sonucunda tahtanın dışına çıkmıyor). Uğur böcekleri bu yürüyüşlerini, tüm böcekler yeni yerlerine ulaştığında tahtanın tüm kareleri dolu olacak şekilde yapabilirler mi? Uğur böceklerinin yürürken birbirlerini engellemediklerini varsayalım.

Kripto-satranç

Yandaki satranç tahtasında bulunan her taş, bulunduğu kareye şifrelendikten sonra koyulmuş. Şifreleme işleminde, vezir, kale, şah, fil ve at parçalarının her biri, yine bu kümeye ait aynı renkten bir parça olarak şifrelenmiş. Şifreleme renkten bağımsız olarak yapılmış. Örneğin, beyaz at yerine beyaz kale konduysa, siyah at yerine siyah kale konmuş. Ayrıca şifre, birebir şekilde yapılmış yani iki farklı tipten parça aynı sonucu verecek şekilde şifrelenmemiş.

Tahtanın şifresiz haline bakıldığında hiçbir parçanın öteki renkten bir parçayı tehdit etmediği görülüyor. Şifreyi çözebilir misiniz?

Üçgenler

(a) 1 m uzunluğunda bir çubuğu rastgele iki yerinden kırarak üç çubuk elde ediyoruz. Kenarları bu üç çubuk olan bir üçgenin var olma olasılığı kaçtır?

(b) Yukarıdaki işlemi şu şekilde değiştirelim: Çubuğu önce rastgele bir yerinden kırarak iki parça elde ediyoruz. Sonra, oluşan iki parçanın uzun olanını rastgele bir yerinden kırarak toplam üç çubuk elde ediyoruz. Bu üç çubuğun bir üçgen oluşturma olasılığı kaçtır?

Asalzade

Robin Hood, asilzadelerden çaldığı N adet altın parayı, yoksullara ulaştırılmak üzere k adet kutuya, her birinde en az iki para bulunacak şekilde paylaştırmak istiyor. Ancak hangi iki kutudaki para sayılarına bakılırsa bakılsın, bu iki sayının ortak bölenlerinin en büyüğünün bir olması gerekiyor. Robin Hood daha çok kişiye para ulaştırabilmek için k sayısını, olabilecek en büyük şekilde seçmek istiyor.

(a) N = 100 için k en çok kaç olabilir?

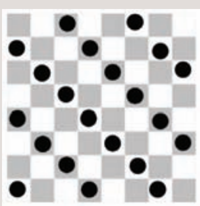
(b) N = 1000 için k en çok kaç olabilir?

Sonsuz Oyun

Gezegenlerarası bir yarışmada iki kişilik bir oyun oynanıyor. Bu oyunda, bir sayı doğrusu üzerinde her tam sayının bulunduğu noktada bir lamba bulunuyor. Başlangıçta lambaların tümü kapalı. İki oyuncudan sırası gelen bu lambalardan bazılarını seçip konumlarını değiştiriyor (açıksa kapalı, kapalıysa açık hale getiriyor). Lambaların tümünü açık duruma ilk getiren oyuncu oyunu kazanıyor.

- A gezegeninden gelen yarışmacılar, her hamlelerinde lambalardan sonlu tane-

Doğumgünü Pastası



Şekilde görüldüğü gibi, 21 mum yeterlidir. 21'in gerekli olduğunu görmek için tahtaya 21 adet 3x1'lik dikdörtgen sığdıralım:

Her dikdörtgenin içinde en az bir mum olması gerektiğinden Mert'in yaşının 21'den küçük olamayacağı açıktır.

n x n tahta için $n^2/3$'ün tam değeri doğru yanıttır. Yeterlilik için yukarıdakine benzer bir çapraz dizilim, gereklilik içinse bu sayıda dikdörtgenin tahtaya sığdığını göstermek yeterlidir.

Çekirge

(a) İki adımda aynı noktaya ulaşmak için, iki aksi yöne eşit uzunlukta iki sıçrama yapmalıdır. Bu olasılık,

$$2(\frac{1}{4})^2+2(\frac{1}{8})^2+\ldots+2(\frac{1}{2^{n+2}})^2+\ldots=\frac{1}{6} \text{ olur.}$$

(2 çarpanı ilk sıçramanın yönünden dolayıdır.)

(b) Üç adımda aynı noktaya ulaşmak için 2^{n+1} uzunluğunda bir adım ve ters yöne doğru 2^n uzunluğunda iki adım (herhangi bir sırayla) atılmalıdır. Bu üç adım 3 farklı şekilde sıralanabilir. İlgili olasılık,

$$6\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2^{3n+7}}=\frac{3}{56} \text{ olur.}$$

Siyah Beyaz Satranç

1. Kd7+ Şa8
2. Şa3 Ka4
3. Kxa4++

Sayıda Çok, Yükte Ağır

Öncelikle az sayıda kese çok sayıda keseden ağırsa, gerekirse karşılıklı yer değişiklikleri yaparak, az sayıda kesenin her birinin öteki taraftaki keselerin her birinden ağır olduğu ve hâlâ kurala uymayan bir tartı elde edebiliriz.

Keloğlan yanına yalnızca bir kese alıp çıkarsa, bir sorunla karşılaşmaz. Dolayısıyla Keloğlan'ın eli boş çıkmayacağını biliyoruz. Kurallara uygun şekilde, olabildiğince

çok altınla çıktığını varsayalım. Aldığı keseleri 100'den başlayarak geriye doğru sıraladığımızda eğer sayılar arasında boşluk varsa, bu boşluktan sonra gelen sayıların hepsini 1 artırdığımızda hâlâ kurallara uygun bir dağılım elde ederiz (ilk paragrafı akılda tutalım). Ama en iyi durumu göz önüne aldığımızdan dolayı, böyle bir boşluk olmamalı. Diyelim ki Keloğlan 100, 99, . . . , 100-2k torbalarını almış olsun. İlk k torbanın toplamı, öteki k+1 torbadan büyük olmamalı. Bu, bize

$100 + 99 + \ldots + (100 - k + 1) \leq (100 - k) + \ldots + (100 - 2k)$

eşitsizliğini verir.

Bu eşitsizlikteki toplamları hesaplayıp sadeleştirmeler yapıldığında

$k^2 + k - 100 \leq 0$ eşitsizliğini elde ederiz.

Buradan, $k < 10$ olduğu ortaya çıkar. Demek ki Keloğlan 80 altın içeren keseyi almamalıdır. 81 ve daha çok altın içeren keseleri alırsa, şartlar sağlanır (En çabuk şekilde nasıl kontrol edebilirsiniz?). Sonuçta Keloğlan 1810 altınla dışarı çıkabilir.

Bölmece

318089414 / 4369 = 72806

Asal Küp Farkları

$x^3 - y^3 = p$ denkleminde $x = 0$ ya da $y = 0$ ise p'nin asal olamayacağı açıktır, dolayısıyla x ve y'nin 0 olmadığını varsayalım. Denklemi $(x - y)(x^2 + xy + y^2) = p$ şeklinde yazalım. İkinci parantezi $A = (x + y/2)^2 + 3y^2 / 4$ şeklinde ifade edelim. $|y| > 1$ ise $A > 1$'dir. $|y| = 1$ olduğu durumda $A = 1$ olması için x sayısı -1 ya da +1 sayılarından biri olmalıdır. Bu durumlardan yalnızca $1^3 - (-1)^3 = 2$ bize bir asal verir. Bu noktadan sonra $A > 1$ olduğunu varsayabiliriz. p sayısı asal olduğu için sini seçip (0 tane kabul edilmiyor) bunların konumunu değiştiriyor.

- B gezegeninden gelen yarışmacılar, her hamlelerinde lambalardan sonsuz tanesini seçiyor ama seçmedikleri sonsuz tane lamba da bulunmak kaydıyla. Daha sonra seçilen lambaların konumunu değiştiriyorlar.
- C gezegeninden gelen yarışmacılar her hamlelerinde lambalardan sonlu tanesini ayırıp (0'dan farklı sayıda) geriye kalan tüm lambaların konumunu değiştiriyorlar.

1. oyuncunun ve 2. oyuncunun gezegenlerine bakarak oyunu hangi durumda hangi oyuncunun kazanacağını belirleyiniz (Örneğin, her iki oyuncu da B gezegenindense oyunu ikinci oyuncu kazanır.)

Avant-garde Satranç Tahtası

Başlangıçta tüm kareleri beyaz olan nxn boyutlarında bir satranç tahtasının karelerinin her biri, birbirinden bağımsız bir şekilde, ½ olasılıkla, siyaha boyanıyor. Boyama işlemi bitince tahtanın tümüyle siyah bir satırının bulunması olasılığı kaçtır?

Turnuva

Yedi cüceler yağmurlu bir günde evde mahsur kalmış ve 3-5-8 turnuvası düzenlemeye karar vermişlerdir. Bu oyun, üç kişi tarafından oynanan bir iskambil oyunu olduğu ve yalnızca bir deste iskambil kağıdı bulunduğu için turnuvada birden çok tur bulunması gerekecektir. Turnuva boyunca herhangi iki kişinin tam olarak bir kez aynı turda karşılaşması istenmektedir.

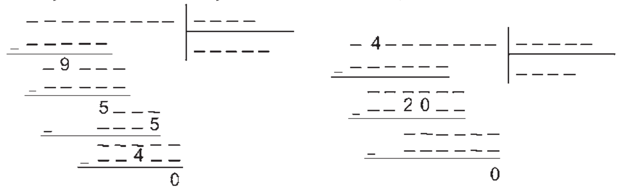
(a) Böyle bir turnuva nasıl düzenlenebilir? Bir fikstür oluşturabilir misiniz?

(b) Pamuk prenses de turnuvaya dahil olmak isterse, yine aynı koşulu sağlayan bir fikstür yapılabilir mi?

ÖDÜLLÜ SORULAR

Değişme Özelliği

Aşağıdaki bölme işlemlerinden biri A/B=C işlemini, öteki de aynı A, B ve C sayıları için A/C=B işlemini temsil ediyor. Tüm sayıları bularak işlemleri tamamlayabilir misiniz? Sayılar 0 rakamı ile başlamamaktadır



Dikdörtgenler ve Prizmalar

(a) Kenarları tam sayı uzunlukta olan bir dikdörtgenin çevresi A birim ve alanı A birim kare ise kenar uzunlukları için tüm olasılıkları bulabilir misiniz?

(b) Benzer bir soruyu bir dikdörtgenler prizması için soralım. Ayrıtları tam sayı uzunlukta olan bir dikdörtgenler prizmasının yüzey alanı A birim kare ve hacmi A birim küp ise ayrıt uzunlukları için tüm olasılıkları bulabilir misiniz?

"Ödüllü Sorular" yanıtlarınız için
e-posta: akisisel@metu.edu.tr
Posta Adresi: TÜBİTAK
Bilim ve Teknik Dergisi,
Atatürk Bulvarı
No: 221 06100
Kavaklıdere Ankara
Faks: 0 312 4276677

$A = p$ ve $x - y = 1$ olmalıdır. Denkleme $x = y + 1$ koyup sadeleştirerek $p = 3y(y + 1) + 1$ elde ederiz. Bu noktadan sonra, p'yi 1000'den küçük yapan olası y değerlerini deneyerek şu sonuca varırız:

y=1 ise p=7, y=2 ise p=19, y=3 ise p=37, y=4 ise p=61, y=6 ise p=127, y=9 ise p=271, y=10 ise p=331, y=11 ise p=397, y=13 ise p=547, y=14 ise p=631, y=17 ise p=919.

y'nin negatif değerleri yeni bir asal sayı vermez.

Bu, w = -y - 1'in y'nin yerine koyulmasıyla görülebilir. Dolayısıyla yanıt:

{2, 7, 19, 37, 61, 127, 271, 331, 397, 547, 631, 919}'dur.

Zar Devirmece

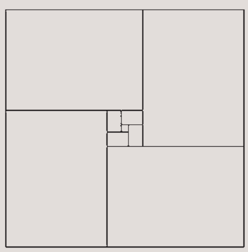
n = 1 durumunda oyunu Burak kazanır. n = 2, 3, 4, 5 için Selin oyunu tek hamlede kazanır.

Zarda 1 ve 2 sayıları karşılıklı yüzlerde olmadığı için, Selin her hamlesinde 1 ya da 2'yi seçebilir (yukarı getirebilir). 2'yi seçebiliyorsa, puanını 2 artırabilir. Seçemiyorsa 1'i seçer. Ardışık hamlede Burak ne yaparsa yapsın, Selin yeniden 1'i seçer. Dolayısıyla her koşulda, bir ya da iki hamlenin sonunda Selin puanını 2 artırabilir. Bundan dolayı eğer n için oyunu kazanabiliyorsa, n+2 için de kazanabilir. Dolayısıyla tüm $n > 1$ tam sayıları için Selin'in bir kazanan stratejisi vardır.

İki Boyutlu Emlakçılık

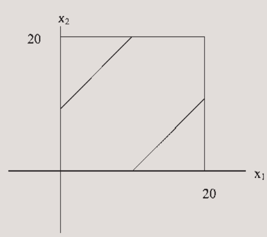
Aşağıda bir örneğin bir bölümü verilmiştir.

Örnekteki dikdörtgenlerin ayrıtlarını her seferinde 5 kat büyüterek ve saat yönü-ters saat yönü dizilimlerini sırasıyla değiştirerek merkezden dışarıya doğru düzlemi doldurunuz.



Üç Boyutlu Emlakçılık

İki küpün kesişmesi için merkezlerinin x koordinatları arasındaki farkın en çok 10 km olması gerekir. Benzer bir koşul diğer koordinatlar için de doğrudur. Merkez koordinatlarının her birinin 0 ile 20 km arasında bağımsız değerler aldığını varsayabiliriz. Merkezlerin x koordinatları sırasıyla x_1 ve x_2 olsun. Bir grafik çizelim:



x koordinatlarının arasındaki farkın 10'dan az olma olasılığı, grafikte $x_1 - x_2 = 10$ ve $x_2 - x_1 = 10$ doğruları arasında ve karenin içinde kalan bölgenin alanının tüm karenin alanına oranı olacaktır. Dolayısıyla bu olasılık 3/4'tür. Soruda istenen olasılık ise, her üç koordinat için bu koşul göz önüne alındığında, $(3/4)^3 = 27/64$'tür.

Kararsız Delegeler

(a) Bir karara varıldığını varsayalım. 6. delegenin oyu, hem 2. hem de 4. delegelerden farklı olmalı, tersi durumda 6. delege bir sonraki turda oyunu değiştirirdi. Oylar 2:B, 4:B, 6:A şeklinde olsun; A ve B'nin hangisinin Evet hangisinin Hayır olduğuna daha sonra karar verelim. 2. delegenin talimatından dolayı 3:A olmalı. Eğer A=Hayır olsaydı, 1. delege de Hayır demiş olmalıydı. Ama bu durumda 4. delegenin talimatı sağlanmıyor. Dolayısıyla A=Evet, B=Hayır olmalı. Bu durumda 1. delege de Hayır der. Şu dağılımı elde ederiz.

1: Hayır 2: Hayır 3:Evet 4:Hayır 5:Hayır 6:Evet

Bu dağılımın tüm koşulları sağladığı kolaylıkla kontrol edilebilir. Dolayısıyla bir karara varılabilir ve bunun tek yolu başlangıç oylamasından bu dağılıma ulaşılmasıdır.

(b) Sürebilir. Şu iki oylamadan birinden başlayan bir durum sonsuza kadar ikisi arasında değişerek sürer:

1: Hayır 2: Evet 3:Hayır 4:Hayır 5:Hayır 6:Hayır

1: Hayır 2: Evet 3:Hayır 4:Hayır 5:Hayır 6:Evet