# BOZ-YAP OYUNLARINDA SON AŞAMA

*Bir çemberi cetvel ve pergel kullanarak kareye dönüştüremezsiniz. Ama matematiksel bir makas bu işi, çemberi çok fazla sayıda parçalara bölerek yapabilmektedir.*

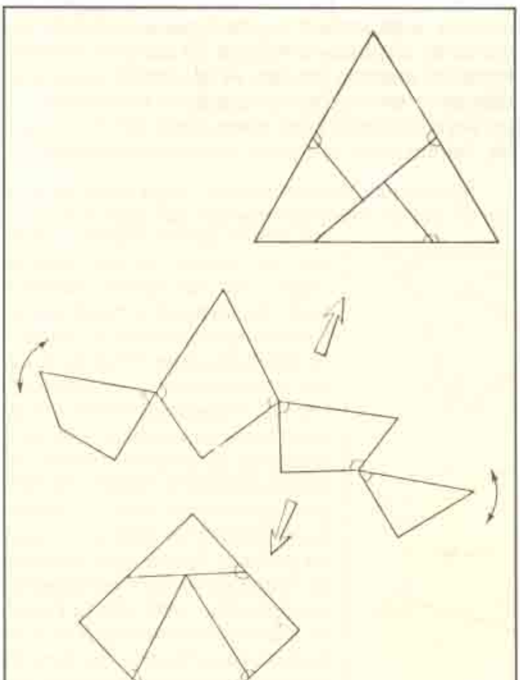
**Ian STEWART**

Matematikçilerin yaptığı en sıkıcı işlerden biri, bizim çok iyi anladığımızı sandığımız şeyler üzerinde şüphe uyandırmalarıdır. Örneğin, hepimiz alan ve hacmin ne olduğunu biliriz, öyle değil mi? Ben sizi alan ve hacim hakkında öğreneceğimiz daha çok şey olduğuna inandırmaya çalışacağım. Hikâye, insan neslinin tarih öncesinde bir yerde başlamakta ve 1925'te matematiksel mantıkçı Alfred Tarski tarafından ortaya atılan bir problemin 1988'de dramatik çözümüyle sonuçlanmaktadır. Tarski, dairesel bir diskin, birleştirildiğinde bir kare oluşturabilecek şekilde sonlu sayıda parçaya bölünmesinin mümkün olup olamayacağını sormuştu. Tarski, böyle bir bölmenin mümkün olması halinde oluşturulacak karenin daireyle aynı alana sahip olması gerektiğini zor da olsa ispatlayabilmiş, fakat ilgili bölmenin mümkün olup olamayacağından emin olamamıştır.

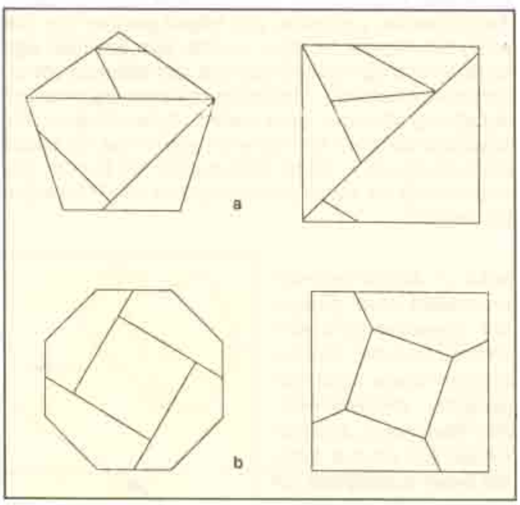
Durun bakalım, sonuçta oluşacak karenin aynı alana sahip olması açıkça ortada değil midir? Daireyi parçalara kesmekle parçaların toplam alanı değişmez ki, öyle değil mi? Ve bir daireyi kare oluşturacak şekilde kesemeyeceğimiz, daire parçalarının eğri kenarları nedeniyle birbiriyle uyuşmayacağı da açık değil midir? Hayır, değildir. Aslında bu iki önermeden biri yanlış, diğeri ise doğrudur.

Tarski'nin problemi eski Yunanlıların ünlü "daireyi kareye çevirme" problemiyle karşılaştırılmaktadır. Aslında bu ikisi çok farklıdır. Klâsik problemde alanı daireninkine eşit olan kareyi cetvel ve pergel kullanarak çizmeniz istenmektedir. Bunun imkânsız olduğu Ferdinand Lindemann tarafından 1882'de gösterildi. Ancak Tarski çizmeyi değil, kesip birleştirmeyi istemektedir.

Kartondan yapılabilen ama cilalanmış sert tahta veya pirinçten yapılırsa daha iyi görünen büyüleyici bir matematik oyuncağı vardır. Geometrik şekilli dört parçanın küçük menteşelerle birbirine tutturulmasıyla yapılmıştır. Eğer menteşeler bir yöne kapatılırsa sonuç bir karedir, diğer yöne kapatılırsa bir eşkenar üçgen elde edersiniz (Şekil 1). 19. yüzyılın sonlarına doğru çok popüler olan bu oyuncak çok ilginç bir bulmaca örneğidir. Böyle bulmacalar verilen şekil veya şekilleri parçalara kesme ve sonra bu parçalarla başka şekil veya şekiller oluşturmanın yollarını istemektedir. Örneğin, bir kareyi parçalayıp



***Şekil 1:** Eşkenar üçgenin kesip-birleştirme ile kareye dönüştürülmesi.*

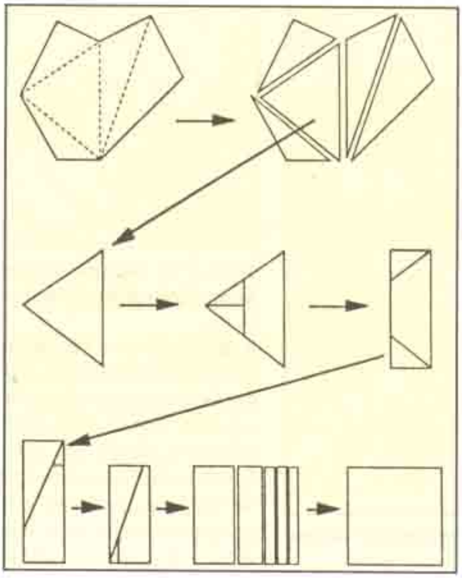



***Şekil 2:** a) Düzgün beşgenin ve b) düzgün sekizgenin kesip-birleştirme ile kareye dönüştürülmesi.*

düzgün beşgene, bir düzgün sekizgene dönüştürebilir misiniz? Evet, ikisi de mümkündür (Şekil 2). Kareyi daha başka nelere dönüştürebilirsiniz?

Kareyi düz çizgiler boyunca parçalara ayırırsak, bu parçaları uygun şekilde birleştirme sonunda her zaman bir çokgen - düz kenarlı - bir şekil elde edilir. Bir kareyi kesince alanının değişmeyeceği açık gözükmektedir. Daha sonra bu inancı tekrar irdeleyeceğiz, ama şimdiden belirtelim ki, bu inanç çokgensel kesimler için doğrudur. Yani bir kare parçalanıp bir çokgene dönüştürülebilirse çokgen, kare ile aynı alana sahip olmak zorundadır. Benzer bütün çokgenler mümkün müdür? Evet mümkündür. Bu sonuç eski Yunanlılar tarafından gösterilmiş olabilir; ancak bildiğimiz kadarıyla bu doğru değildir. Problem Bolyai-Gerwien teoremi olarak adlandırılmaktadır; çünkü soruyu Wolfgang Bolyai ortaya atmış ve P.Gerwien bunu 1833'te yanıtlamıştı. William Wallace da 1807 yılında teoremin bir ispatını vermiştir (Şekil 3).

Aslında alan ve hacim, ilk okul öğretmenlerinin iyi bildiği gibi oldukça temel kavramlardır. İlk okullarda çocuklar genel kavramı kazanana kadar makas ve kâğıtlarla, çeşitli şekillerde kaplarla ve zemini sularla kaplayarak çok sayıda deneyin yapılması gerekir. Özellikle konunun düşüncesi insana doğal gelmez; örneğin, bir sıvının miktarı sıvıyı tutan kabın biçimine bağlı değildir. Birçok yetişkin, kurnaz paketleme yöntemleriyle kandırılabilir ve örneğin olması gerekenden daha fazla şampuan aldıklarını düşünmeleri sağlanabilir. Temel zorluk, alan ve hacim dikdörtgenler, prizmalar gibi köşeli şekiller için çok kolay tanımlanırken diğer şekiller için özellikle eğri kenarlı veya eğri yüzeyli şekiller için oldukça zor tanımlanabilmektedir. Hepimize dairenin alanının $\pi r^2$ olduğu öğretilmiştir, ama neden böyle olduğunu hiç düşündünüz mü? Bir dairenin içerisinde ne kadar alan olduğuyla $\pi$'nin ne ilgisi olabilir ki? Bunun, karenin içinde ne kadar alan olduğuyla nasıl bir bağıntısı vardır?



***Şekil 3: Bolyai-Gerwien teoreminin ispatı. Çokgenin üçgenlere bölünmesiyle işe başlanır. Her üçgen aynı alana sahip dikdörtgene dönüştürülür. Her dikdörtgen, kenarlarından biri istenen karenin kenar uzunluğuna eşit olan başka bir dikdörtgene dönüştürülür (istenen karenin kenar uzunluğu çokgen alanının kare köküne eşittir). Son olarak elde edilen dikdörtgenler birleştirilerek istenen kare oluşturulur. Aynı yöntemle sonlu çokgenler cümlesi kesilip birleştirilerek aynı toplam alana sahip başka şekiller cümlesine dönüştürülebilir.***

## SONSUZ TOPLAMA

Alan ve hacim öyle kullanışlı kavramlardır ki, gerçekten sağlam ve mantıklı bir temele oturmayı hak etmişlerdir. Bolyai-Gerwien teoremi sadece bir eğlence merakı değildir: O, alan kavramını tanımlamak için uygun bir yöntemi desteklediği için önemlidir. Karenin alanını kenar uzunluğunun karesi şeklinde tanımlayarak başlayalım. Örneğin, kenarları 3 cm uzunluğunda olan bir kare 9 cm'lik bir alana sahiptir. O halde herhangi bir çokgenin alanı, kesip birleştirerek dönüştürülebileceği karenin alanı olarak tanımlanır. Bu yaklaşım, alanın iki anahtar özelliğini ortaya çıkarır. Birincisi değişmezliktir; bir şeklin alanı katı hareket sırasında sabit kalmaktadır. İkincisi toplanabilirliktir; birkaç şekil üst üste gelmeyecek şekilde yan yana birleştirilirse, yeni oluşan şeklin alanı, şekli oluşturan parçaların alanları toplamına eşit olur.

Aslında toplanabilirliğin iki türü vardır. Zayıf olan "sonlu toplanabilirlik", sonlu sayıda parça için söz konusudur; güçlü olanı ise sonsuz sayıda parça için söz konusudur. Analizin temeli olan integrasyon tekniği, şekillerin yan yana toplanabilirlik özelliğini sonsuz sayıda parçaya genişletebilir. Bu durumda toplam alan, parçaların alanlarıyla oluşturulan sonsuz seri toplamı olarak tanımlanabilir. Bu, "sonsuz toplanabilirlik"tir. Sonsuz seriler yanıltıcı oldukları için bu yaklaşım son derece dikkat gerektirir. Ancak daire gibi eğrisel bölgelerin alanlarını bulmak istersek bu kaçınılmazdır. Bir daire sınırlı sayıda üçgene kesilemez, ama sonsuz sayıda üçgene kesilebilir. Bu yönde bir düşünceyle Arşimet, bir dairenin alanının, kenarları dairenin yarıçapı ve çevresinin yarısı olan dörtgenin alanının aynısı olduğunu kanıtlamıştı. Pi ($\pi$) sayısı çevrenin çapa oranı olarak tanımlandığında, bunun nasıl olduğunu kolayca görebilirsiniz.

İlgi alanı sayılar kuramından fiziğe kadar uzanan ve en büyük matematikçilerden biri olan Alman bilim adamı David Hilbert, hacim için de alana benzer şekilde "açık" bir yaklaşımın mümkün olup olamayacağını merak etmişti. Matematikçiler tabiî ki, hacmin ne olduğunu zaten biliyorlardı. Örnek olarak herhangi bir piramidin hacmini hesaplayabilirlerdi (taban alanı çarpı yüksekliğin üçte biri). Ama yine de sağlam mantıklı temeller arıyorlardı. Hilbert, herhangi bir polihedronun (düz yüzeylerle sınırlanmış bir katı) sınırlı sayıda parçaya kesilip aynı hacimde bir kübe çevrilip çevrilemeyeceğini sormuştu. 1900 yılında Paris'te yapılan matematikçilerin uluslararası kongresinde bu soru 23 çözülmemiş büyük sorunun arasında listelenmişti. Bu son problemin çözümü, diğer 22'sinden farklı olarak fazla uzun sürmedi. Problemin çözümü bir yıl içinde topolojinin kurucularından biri olan

Max Dehn tarafından yapıldı. Şaşırtıcı olarak yanıt "hayır"dı. Dehn'nin kanıtı, hacim gibi kesme-birleştirme sonucu değişmeyen ve şimdi Dehn sabiti olarak bilinen bir sayıyı tanımlamak için uzay açılarını kullanır. Aynı hacme sahip olan katıların değişik Dehn sabitleri olabilmektedir. Örneğin, bu bir küp ve bir düzgün tetrahedron için böyledir. Yani bir tetrahedronu parçalayıp eşit hacimli bir kübe dönüştüremezsiniz. Dehn sabiti üç boyutlu parçalamalarda tek yeni kriterdir ve Bolyai-Gerwien kuramının bir benzeri olarak çok yüzeyli, üç boyutlu cisimlerin kesilerek birbirine dönüştürülmesi sadece ve sadece aynı hacme ve aynı Dehn sabitine sahip olmaları halinde mümkündür.

Birbirinden ayrı şeyler olmasına karşın, alan ve hacim değişmezlik ve sonsuz toplanabilirlik gibi temel özellikleri paylaşırlar. Henry Lebesgue, bu kavramlar için genel bir kuram geliştirdi. Henry Lebesgue bugün Lebesgue ölçüleri olarak adlandırılan bu tür genel kavramlar geliştirdi. Bu çalışmalar sırasında dağınık ve karmaşık cümlelerin iyi belirlenmiş alan veya hacimlere sahip olamayabilecekleri anlaşılmıştı. Sadece "ölçülebilen" cümleler iyi tanımlanmış alan ve hacimlere sahiptir. Bu cümleler bilinen bütün geometrik şekilleri ve bununla birlikte daha karmaşık cümlelerin geniş bir bölümünü içerir, ama herşeyi değil. Ölçüm kuramı değişik nedenlerle önemlidir; özellikle olasılık kuramının temelini oluşturduğu için.

Tarski sık olarak Lvov'daki İskoç kahvehanesine giden bir Polonyalı matematikçiler grubunun üyesiydi. Bir başka üye de Stefan Banach'tı. Tüm ilginç düşünceler İskoç kahvehanesindeki sohbetlerle ortaya çıkmıştır. Bunların arasında Banach-Tarski açmazı olarak bilinen bir kuram hiç inanılmayacak kadar saçma görünür. 1924 yılında ortaya atılan bu açmaza göre, bir katı küre 6 parçaya bölünüp sonra da bu parçaların katı hareketlerle birleştirilmesiyle orijinal küreyle aynı büyüklüğe sahip katı iki küre elde edilebilir. Bu durumda hacim sekiz katına çıkmıştır. Bunun imkânsız olduğu açıktır. Parçaların keyfi, ince, detaylı ve çok karışık olmalarından dolayı bir kesimi aslında fiziksel bir madde üzerinde uygulanamaz. Uygulanabilseydi, örneğin altın piyasasını yıkmak için iyi bir iş ortaya çıkardı.

Bir defa çok karmaşık parçalar hakkında düşünmeye başladığımızda dikkatli olmak zorundayız; parçalar uyumlu yapılar olmayabilir. Her bir parça bir çok ayrılmış unsurdan - sonsuz sayıda olabilir - oluşabilir. Böyle bir unsurlar cümlesine katı hareketler uygulamak istersek, sadece her unsurun şeklini korumak zorunda olmamız bir yana, parçaların karşılıklı bağıntılarını da korumak zorundayız. Ve kesin olması gereken sadece değişmez katı hareket kavramı değildir. Örnek olarak bir kareyi eşkenar bir üçgene dönüştürdüğümüzde parçaların kenarları için çakışıp çakışmama açısından endişe etmiyorduk. Ama yüksek derecede karışık parçalar cümlesi için daha dikkatli olmamız gerekir: Her bir nokta kesin olarak sadece tek bir parçada yer almalıdır. Bolyai-Gerwien kuramının bu karmaşık durum için halen doğru olduğu Banach tarafından gösterilmiştir.

Banach-Tarski açmazının temeli (ama detayları değil) bir küre yerine sözlük düşünülerek anlaşılabilir. Bu idealleştirilmiş bir matematikçiler sözlüğüdür. Bu sözlük bir alfabenin tüm harflerinden oluşturulan anlamlı veya anlamsız olabilecek bütün kelimeleri içeren "Hyperwebster"dır. Alfabetik sıraya göre düzenlenmiştir. A, AA, AAA, AAAA, ... kelimeleriyle başlar ve sonsuz sayıda kelimeden sonra AB'ye geçer. Bununla birlikte örneğin AARDVARK, BANACH, TARSKI veya ZYMOLOGY gibi her kelime bu sözlükte yer alır. Şimdi size bir "Hyperwebster"ı her biri doğru alfabetik sırayı sürdüren, içinde yedek bir alfabesi bulunan 26 kopyasına nasıl parçalanacağını göstereceğim.

26 kopyadan ilki, "A hacmi" A ile başlayan, A'nın kendisinden başka her kelimeyi içeren elemanlar cümlesi. İkincisi "B hacmi" B ile başlayıp, B'nin kendisinden başka her kelimeyi içeren elemanlar cümlesi ve böyle devam eder. Şimdi b hacmini düşünelim. BA, BAA, BAAA olarak başlar ve böyle devam eder. Gerçekten Hyperwebster'daki bir B hariç her kelimeyi, tam olarak bir defa içerir. BAARDVARK, BBANACH, BTARSKI ve BZYMOLOGY B hacmindedir. Bundan başka, bu kelimeler AARDVARK, BANACH, TARSKI ve ZYMOLOGY ile aynı sıradadır.

Aynı özelliği A hacmi, C hacmi ve Z hacmi için de söyleyebiliriz. Bu hacimlerden her biri her kelimenin başında fazladan bir harfle tüm Hyperwebster'ın mükemmel birer kopyasıdır. Buna ters olarak Hyperwebster'da tek harflerin dışında her kelime kesin olarak 26 hacimden birinde yer alır. Örneğin, AARDVARK A hacmindedir ve Hyperwebster'ın kendisinde ARDVARK olarak bulunur. BANACH B hacmindedir ve Hyperwebster da orijinal konumu ANACH'a karşı gelir. Çizgi filmcilerin çok kullandığı sembol ZZZZZ, Z hacmindedir ve Hyperwebster'daki karşılığı birazcık daha kısa bir ZZZZ'dır.

Kısaca bir Hyperwebster parçalara kesilip kelimelerin sırası değiştirilmeksizin aslıyla özdeş 26 Hyperwebster ve bir yedek alfabe oluşturulabilir. Hyperwebster'ın sıra korunarak parçalanıp yeniden düzenlenmesinde hacim korunamamıştır. "Hyperwebster" yerine şimdi "küre", "kelimeler" yerine "nokta" ve "sırayı değiştirmeksizin" yerine "aradaki uzaklıkları değiştirmeksizin"i okuyun. O zaman Banach-Tarski açmazını elde etmiş olursunuz. Aslında bu karşılaştırma göründüğünden çok daha benzerdir; çünkü Banach-Tarski açmazı benim kelime sıralarını kullanmam gibi aynı yolla bir dizi katı hareketlerin kullanılmasıyla kanıtlanmıştır. Bunu yapmanın mümkün olduğu Felix Hausdorff tarafından keşfedilmiştir. Felix Hausdorff, bağımsız dönmelerin her değişik harf dizisinin farklı bir kelime verdiği gibi bağımsız dönmeler için her değişik kombinasyon dizisinin belli bir sonuca ulaştığını göstermişti. Bu bakımdan Banach-Tarski açmazı tam anlamıyla Hyperwebster açmazının bir benzeridir.

Banach ve Tarski aslında daha zor bir şeyi ispatladılar. Uzayda iki cümle alın, iki koşul geçerli olsun:

Sonsuza kadar genişlemesinler ve her biri istediğiniz kadar küçük veya büyük olan bir katı küre içersin. O zaman birini parçalayıp ötekine dönüştürebilirsiniz. Bir daireyi kareleştirmek zor olabilir, ama Banach ve Tarski küreyi küpe dönüştürebilmektedir. Buna göre bir futbol topunu Lady Godiva'nın bir heykeline, 3 ışık yılı yüksekliğinde ölçekli bir tavşan modeline, ya da Taç Mahal şeklinde bir toplu iğne başına dönüştürmek mümkündür.

## DÜZLEM GERÇEĞİ

Banach-Tarski açmazı, iki boyutta geçersizdir. Düzlemde parçalama ile alanları değiştiremezsiniz. Bunun temel nedeni, düzlemde arka arkaya iki dönme uygulamasının sonucu, uygulama sırasından bağımsızdır. Benzer olarak, "Dyslexicon"da harflerin diziliş sırası önemli değildir. SPOTTER, POTTERS'la aynı anlama gelir. Şimdi parçalama oyunu iyice düzenin dışına çıkar; eğer SPOTTER'ı S hacmine koyarsak (ki bu aslında POTTERS'la aynıdır, ama F hacmi OTTERS'a ilişkin hiçbir şeyi içermez). Böylece önceden kullandığımız sözlük yaklaşımı burada kesinlikle işlemeyecektir. Tarski, bu noktada başka hiçbir şeyin işlemeyeceğini de göstermiştir. Banach, bugün Banach ölçümü olarak adlandırılan ve söz konusu açmazın düzlemde de geçerliliği üzerine bir kriter buldu. Bu bir alan kavramıdır ve alana sahip olan veya olmayan fakat katı ve sonlu toplama özelliğine sahip olan her cümle için tanımlanmıştır. Buradan hiçbir iki boyutlu Banach-Tarski açmazının mümkün olamayacağı sonucuna ulaşılmıştır.

Tarski, daireyi kareleştirme problemini ortaya attığı zaman bu sonuca ulaşmıştır. Eğer dairesel bir disk birleştirildiğinde kare oluşturulabilecek şekilde sonlu sayıda parçaya kesilebilirse, karenin "doğru" alana sahip olması gerekir. Böyle bir işlemin olup olamayacağı Tarski'ye göre açık değildi.

Problem zorluk gösterince matematikçiler özel durumlara konsantre oldular: Parçaların yapısının veya izin verilen katı hareketlerin kısıtlanması gibi. 1963'te Lexter Dubins, Morris Hirsch ve J.Kalrush, bir daireyi sürekli eğriler boyunca kesip parçaları birleştirerek kare oluşturulamayacağını kanıtladılar. Bu durumda parçaları bir yönde birleştirilirse bir daire ve diğer yönde birleştirilirse bir kare elde edebileceğimiz bir boz-yap bulmacasını piyasaya süremezsiniz. Eğer daire kesme birleştirme ile kareleştirilebilirse, parçaların bilinenden çok daha kompleks olmaları gerekir.

1988'de, Capri'deki bir konferansta adı Richard Gardner olan Amerikalı bir matematikçi, bir konuşma yaptı. Konuşmasında sadece iki boyutta değil, hiçbir boyutta sınırlı katı hareketleri sistemiyle Tarski'nin daire-kareleştirme probleminin hiçbir türü için çözüm olmadığını ispatladı. Daha geniş ölçekli katı hareketler sistemine izin verilse bile aynı sonucun doğru olacağını gösterdi. Dinleyicilerin arasında Budapeşte'deki Lorand Eötvös Üniversitesi'nden gelen Macar matematikçi Miklos Laczkovich de vardı. Laczkovich, tek boyuttaki kesme birleştirme problemleri hakkında dikkatli bir çalışma yapıyordu. Laczkovich'e göre, en azından tek boyutta Gardner'in vardığı sonuçların yanlış olduğu anlaşılıyordu.

Bu buluş Tarski'nin daire-kareleştirme problemi üzerine yeni düşünceleri harekete geçirdi ve iki ay içerisinde Laczkovich tam bir çözüm elde etti. Buna göre bir daireyi sınırlı sayıda kesim yaparak kareye dönüştürebilirsiniz. Daha da şaşırtıcısı, parçaların döndürülmesi de gerekmemektedir. Sınırları örneğin elips, hilâl veya bir amibin şekli gibi olan herhangi bir şekil için de aynı sonuç geçerlidir. Laczkovich'in yöntemi aşağı yukarı 10 bölüm içermektedir; ispat yaklaşık 40 sayfa tutmakta ve birçok yeni düşünce içermektedir. Doğal olarak ispat oldukça tekniktir.

İspatta kullanılan yeni düşüncelerden biri, "evlilik teoremi" türünden bir teoremin kullanılmasıydı. "Evlilik teoremi" olarak bilinen teorem şöyledir: Bir yerleşim merkezinde, sadece birbirini iyi tanıyan karşı cinsten müşterileri buluşturan bir evlendirme bürosu vardır. Bu durumda hangi koşullarda yerleşim merkezinin tüm insanları aynı anda buluşturulabilir? Önce bu yerleşim merkezindeki kadın ve erkek sayısının eşit olması gerekir, fakat bu yeterli değildir. Örneğin, bazı erkekler hiçbir kadını iyi tanımamış olabilir. Her erkek en azından bir kadını iyi tanımış olsa bile başka sorunlar olabilir. Örneğin, 200 erkek tek bir kadını iyi tanıdığı için hepsi onunla buluşmak isteyebilir. Bu problem üzerinde ne kadar çok düşünürseniz o kadar sorun ortaya çıkmaktadır; fakat problemin çok somut bir çözümü vardır. Yani verilen şartlarda yerleşim merkezinin tüm insanları belli bir koşul altında ikişer ikişer aynı anda buluşturulabilir. Evlilik teoremine göre bu koşul yerleşim merkezinde her erkeğin ve her kadının mümkün olduğunca fazla sayıda karşı cinsten insanı önceden iyi tanımış olmasıdır. Laczkovich'in ispatında "erkekler" karenin kesilmiş parçalarına, "kadınlar" dairenin kesilmiş parçalarına ve "iyi tanıma" koşulu da "katı dönme hareketi"ne karşı gelmektedir. Evlilik teoremi, Laczkovich'e karenin uygun kesilmiş parça koleksiyonunu dairenin uyumlu parça koleksiyonuyla ikili ikili buluşturma olanağı sağlamıştır. İspatın kalan kısmı ise uygun parça koleksiyonlarının oluşturulmasıyla ilgilidir.

Böylece boz-yap oyunlarında son aşamaya ulaşılmıştır.

*New Scientist Nisan 1991'den kısaltarak çev.:*
*Özgün DEMİRCAN*

**Akıllı olmak bir şey değildir; önemli olan o aklı yerinde kullanmaktır.**

Descartes