Küçük Bir Not
Fermat'nın Son Teoremi

Her şey küçük bir notla başladı. Arithmetica'nın bir kopyasında boş bulunmuş kenarlardan birine düşünülen küçük ve masum bir notla... Not ünlü Fransız matematikçi *Pierre de Fermat*'ya aitti. Kimbilir belki oğlu Samuel bu kitabı bulup sayfalarını karıştırmasa Fermat'nın bu notu gün ışığına hiç çıkmayacaktı. Ancak bulundu ve böylelikle o ünlü "*Fermat'ın Son Teoremi*" yayımlanmış oldu. Teoremin söylediği, daha doğrusu Fermat'nın iddiası; n ikiden büyük olmak üzere 0'dan farklı x,y,z tamsayıları için $x^n+y^n=z^n$ eşitliğinin hiçbir çözümü olamayacağıydı. İlginç olan ise notun son cümlesiydi: "Bunun için dikkat çekici bir ispat bulduysam da sayfanın kenarı bunu yazabilmem için çok küçük kalıyor."

Evet, işte bu masum görünüşlü cümleler tam 3,5 asır boyunca matematikçileri (ve matematikçi olmayanları) uğraştırdı durdu. Filmin sonunu göremeden elektrikler kesilmiş ve beyinleri kemiren sorular ortada kalmıştı: Acaba gerçekten bu iddia doğru muydu? Ya da Fermat dikkat çekici (dikkat çekici olmasa da olur) bir ispat bulmuş muydu? Sakın, yanlış anlamayın! Fermat'ya inanmıyor değilim, ama üstat bir yerlerde $n=4$ için iddiasının ispatını yazabileceği bir boşluk bulurken her nedense bütün genel hal için geçerli bir ispatı bir türlü yazamamıştı. Belki de daha sonra bulduğu ispatın yanlış olduğunu farketti. Kim bilebilir ki?

Peki, Fermat böyle bir iddiayı nasıl ortaya atmıştı? Elbette, geçmişe dönüp bunu ona sormamız mümkün olmadığından biz tahmin etmeye çalışacağız. Fermat söz konusu iddiasını başta da belirttiğimiz gibi Diophantos'un Arithmetica'sında boş bulduğu bir yere sıkıştırmıştı. İşte bu kitap, Diophantos'un ortaya koyduğu ve kendi ismini taşıyan denklemleri anlatıyordu. Gelin, biraz bu denklemler üzerinde duralım. Katsayıları tamsayı olan herhangi bir dereceden n bilinmeyenli bir denklemi ele alalım. Eğer bu denklem çözülebilirse çözümleri arasında tamsayılar olabilir mi? Bunun için aklımıza gelen ilk örnek $x^2+y^2=z^2$, yani Pisagor eşitliğidir: İki karenin toplamının yine bir kareyi verdiği eşitlik. Bu eşitliğin $3^2+4^2=5^2$ ve $5^2+12^2=13^2$ gibi tamsayı çözümleri vardır. Aslında bu eşitlik için sonsuz sayıda tamsayı çözüm bulunabilir. İşte Fermat bu kitabı okurken kafası tam da bu noktaya; *Pisagor Eşitliği*'ne takılır. Mesela, aynı eşitliğin 3. dereceden kuvvetlerde de geçerli olup olmadığı sorusu ortadadır ve bu sorunun yanıtını kendisi de merak etmiş olabilir. İsterseniz, bu soruyu bir de biz kendimize soralım: Acaba 1^3+2^3 bir tamsayının kübü olabilir mi? Hayır, çünkü 9'a eşit. Ya 2^3+3^3 ? O da değil. Bir de $9^3+10^3=1729$'u deneyelim. Çok yakın ama yine sağlamıyor, çünkü $12^3=1728$'de kalıyor. Bu eşitliği sağlayan hiç tamsayı yok mu derseniz, elbette var: her x tamsayısı için $0^3+x^3=x^3$ sağlanıyor, fakat bu örneğin hiçbir çekici yanı olmadığını kabul ederseniz. Böylece şu sonlu hayatımızdaki sonlu denemelerimiz ne yazık ki 0'dan farklı hiçbir tamsayı için eşitliği sağlayan bir çözüm vermiyor ve üstüne üstlük bu durum yalnızca 3 için değil, 2'den büyük tüm n'inci dereceden kuvvetler için geçerli... İşte böylece Fermat'nın söz konusu iddiasına bizler de varmış oluyoruz. Tabii, bir ispata sahip olmaksızın...

Gelin şimdi, $x^n+y^n=z^n$ eşitliğimiz hakkında araya hemen birkaç satır sıkıştıralım. Bu satırlar, eşitliğimizde yalnızca n'nin 4 ve tek asal olduğu halleri incelememizin yeterli olduğunu anlatıyor. Neden derseniz, bir sayının asal olmayan herhangi bir dereceden kuvvetini; mesala 21'i düşünün. Dikkat ederseniz elde ettiğimiz sayı, aynı zamanda 3'üncü dereceden de bir kuvvet oluyor. Göze hitap edecek olursak $x^{21}+y^{21}=z^{21}$ ise $(x^7)^3+(y^7)^3=(z^7)^3$ eşitliğini elde ediyoruz. Böylelikle $n=21$ için eşitliğimizde bir tamsayı çözüm varsa $n=3$ (yani bir asal) için de mutlaka bir tamsayı çözüm bulunmuş oluyor. Öte yandan, ikiden büyük tüm tamsayılar ya dört ya da bir tek asalla bölündüğünden incelenmesi gereken durumlar n'nin 4 ve tek asal olduğu hallere indirgenmiş oluyor. (Bu arada hemen belirtelim; 2'ye "çift asal", diğer asallara da "tek asal" deniyor.)

Hatırlarsanız, $n=4$ için Fermat'nın bir ispatı olduğunu söylemiştik. Fermat, aynı zamanda $n=3$ için de bir ispat sunuyor. Ondan bağımsız olarak İsviçreli matematikçi *Leonhard Euler* de, $n=3,4$ için eşitliğimizin hiçbir tamsayı çözümü olmadığını kanıtlıyor. Ama belki Euler'in $n=3$'e dair ispatında biraz daha temkinli davranmamız gerekli. Çünkü bu ispatta bir yerlerde işler yanlış gitmeye başlıyor. Fakat Euler'in diğer ispatlarında kullandığı fikirlerle bu hatayı tamir etmek mümkün olduğundan, $n=3$ durumu için ispatın Euler'e atfedilmesini garipsememek gerekir, sanırım.

Daha sonra 1828'de *Peter G. Lejeune Dirichlet*, $n=5$ durumu için Fermat'nın iddiasını kanıtlıyor, ardından 1830'da da *Adrien-Marie Legendre*. 1839'da *Gabriel Lamé*, $n=7$ için bir ispat sunuyor, fakat bir takım hatalar yapıyor. Bunlar 1840'da *Henri Lebesque* tarafından düzeltiliyor. Yani iki yüzyılda yalnızca $n=3,4,5,7$ özel durumları için Fermat'nın iddiası ispatlanabiliyor. Kimsenin tüm iddia hakkında ortaya attığı bir düşünce yok mu derseniz, 1847'de Lamè'nin bütün n'inci dereceden kuvvetler için geçerli olduğunu söylediği bir ispatı var. Fakat *Ernst E. Kummer*'in de bu ispatta bulduğu bir hata var. Eh, ne de olsa hatasız kul olmaz! Lamè'nin temel stratejisi çok verimli olmakla beraber ne yazık ki izlediği taktikler kötüydü. Stratejisi yeni bir sayı çeşidi olan cebirsel sayıları tanıtmaktan ibaretti. Bu sayılar rasyonel katsayılara sahip olan herhangi bir polinomun kökü olan sayılardı. Yani tamsayıların *büyük ağabeyleri* idiler. Ancak detaylar o kadar önemli değil. İsterseniz, buradan biraz başka bir dala atlayalım. Bildiğiniz gibi, x^n+y^n ifadesi başka iki ifadenin çarpımı cinsinden yazılabilmektedir. Örneğin; $n=5$ olduğunda

$$x^5+y^5=(x+y)(x^4+x^3y+x^2y^2+xy^3+y^4)$$

yazılabilir. $x+y$ çarpanı güzel ve basittir, ancak geriye kalan kısım da bir o kadar sevimsiz ve karışık... İşte bu noktada Lamè, bu karışık olan çarpanı kendi bulduğu cebirsel sayıları kullanarak dört tane daha güzel ifadenin çarpımı cinsinden yazabileceğini farketmiştir. Bunu genelleştirirsek x^n+y^n, n adet basit terimin çarpımı cinsinden yazılabilir. Üstüne üstlük bu terimlerin çarpımı n'inci dereceden bir kuvvettir, çünkü üzerine kafa yorulan eşitlik $x^n+y^n=z^n$ dir. Aynı zamanda Lamè bu terimlerden hiçbirinin ortak bir böleni olmadığını görür. Eğer bildiğimiz tamsayılar ile ortak bölenleri olmayan terimlerin çarpımı n'inci dereceden bir kuvvet ise o zaman her terimin de ayrı ayrı n'inci dereceden bir kuvvet olması gerekir. Çünkü her sayı asalların çarpımı olarak yalnızca bir şekilde ifade edilebilir. Lamè, aynı özelliğin cebirsel sayılar için de geçerli olduğunu varsaymıştır. Böylelikle artık elinde yalnız bir değil, n adet farklı eşitlik vardır, herbiri de n'inci dereceden bir kuvvettir ve hepsinin de aynı anda çözümü sağlaması şarttır. Demek istediğim Fermat'nın iddiasının aksine eğer $x^n+y^n=z^n$ için bir tamsayı çözüm varsa her n adet eşitlik için de bir tamsayı çözüm olması gerekir. Bu elbette böyle bir çözüm olma olasılığını n kez daha zorlaştırmıştır ve Lamè, beklediği gibi böyle bir çözümün olamayacağını ispat etmiştir. Ne yazık ki hayat bu kadar kolay değildir. Çünkü Kummer ve diğerleri $n=23$ için Lamè'nin cebirsel sayılarının birden fazla şekilde asal çarpanlarına ayrılabileceğini göstermiştir. Kummer, bu pürüzü halletmek için uğraşırken bu kez yepyeni ve oldukça da verimli bir malzemeyle karşımıza çıkagelir, adını ideal koyduğu sayılarıyla... Bu sayılar "fazladan" bazı asal çarpanları da beraberinde getirmektedir ve tüm cebirsel kuralların doğru işlemesini sağlamaktadır. Bu arada gördüğünüz gibi her satırda olaylar daha karmaşık bir hal almakta ve daha soyut ifadeler karşımıza çıkmakta... Oysa bu işin başında Fermat'nın o masum iddiasının ne kadar açık bir ifadeden oluştuğunu hatırlarsınız. Ancak bu matematiğin bizi sürüklediği yol... Kim şikayet edebilir ki?

1847 yılına gelindiğinde Kummer ideal sayılarla ilgili teoremini kullanarak $n=37,59$ ve 67 dışında 100'e kadar olan bütün n'ler için Fermat'nın iddiasını kanıtlamıştı. 1857 yılında da bu matematiksel sistem biraz daha güçlendirildi, deyim yerindeyse birkaç kayış ve çark daha eklendi ve Kummer ile Dimitri Mirimanoff sözkonusu istisnai durumlar için sistemin çalışmasını sağladılar. 1992 yılına gelindiğinde benzer metodlarla bir milyona kadar tüm n'ler için iddia doğrulanmıştı. Oysa hemen bütün sayılar bir milyondan büyüktü. O zaman neden yıllar boyu böyle özel durumlar incelenerek iddia kanıtlanmaya çalışılmıştı? Çünkü ne de olsa bir milyona ya da iki milyona gelseniz de sonuçta bu bir hayat törpüsüdür ve geride sonsuz adet tamsayı vardır. Elbette tüm bu işlemler sırasında umulan bütün oyunu bir anda bitirecek ve "şah-mat" dedirtecek bir ışığın ortaya çıkmasıydı. Ancak o ışık hiç ortalarda gözükmedi.

Artık yeni bir fikre ihtiyaç vardı ve bu yeni fikir oldukça farklı bir yönden Fermat'nın iddiasına doğru yelken açmıştı. Artık sorulan soru; bir Diyofant (Diophantos) denkleminin kaç tane tamsayı çözümü olabileceğiydi. Elbette, Pisagor eşitliği gibi bazı Diyofant denklemlerinin sonsuz sayıda çözümü vardı; bazılarınınsa bizim $3\leq n\leq 1\ 000\ 000$ için eşitliğimizde olduğu gibi -0'dan farklı- hiçbir çözümü yoktu. Kimileri ise sonlu sayıda çözüme sahipti: $y^2+2=x^3$ için pozitif tamsayılardaki tek çözümünün $x=3$, $y=5$ olması gibi...

1922 yılında ise İngiliz matematikçi *Louis J. Mordell*, neyin tamsayı çözümleri için bu tür farklı olasılıkları yarattığını incelemekteydi. Böyle bir eşitliğin karmaşık sayılardaki çözümlerinin bir topolojik yüzey oluşturduğunu gördü. Biliyorum, belki "topoloji" terimini ömrünüzde daha önce hiç duymadınız, ama kabaca bir ifadeyle şöyle tanımlanabilir: Topolojik uzay, limit ve süreklilik kavramlarının anlamlı olduğu uzaydır ve topoloji de bir bakıma köşeli olmayan şekillerin geometrisidir. Şimdi eğer hayatı daha kolay hale getirmek gerekirse, Mordell bir peynir diliminde ya da ceviz kabuğunun üstünde olduğu gibi bu yüzey üzerinde de sonlu sayıda delik bulmuştu. Onu en çok etkileyen ise sonsuz adet tamsayı çözümü olan eşitliklerin karmaşık sayılarda çözüldüklerinde ya tek bir delik olduğunu ya da hiçbir delik olmadığını gözlemlemesiydi. Anlaşılan topoloji ve aritmetik arasında bir bağ vardı. Mordell yeterince ikna olmuştu ve bugün Mordell savı dediğimiz savını ortaya koydu: "İki ya da daha fazla delikli bir yüzey oluşturan eşitliklerin yalnızca sonlu sayıda tamsayı çözümü olabilir."

İyi de tüm olup bitenin Fermat'nın Son Teoremi ile ilgisi neydi? $x^n+y^n=z^n$ eşitliğine karşılık gelen yüzey üzerindeki delik sayısı $(n-1)(n-2)/2$ idi ve $n>3$ için bu sayı en az ikiydi. Dolayısıyla Mordell savı, eğer eşitliğimizin tamsayı çözümleri varsa onların ancak sonlu sayıda olabileceğini beraberinde getiriyordu. Aman dikkat! Mordell, burada ortak çarpanları olmayan çözümlerden bahsetmekteydi, yoksa elbette x, y, z eğer bir çözüm oluşturuyorsa $2x$, $2y$, $2z$ ya da $3x$, $3y$, $3z$ de bir çözüm oluşturabilir ve bu sonsuza dek böyle gidebilir.

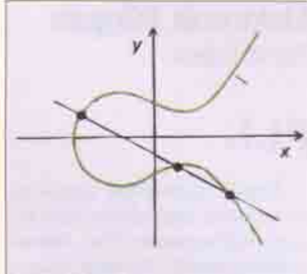
Bundan sonra atılan ikinci büyük adım için 1962 yılını beklemek gerekiyordu. *Igor R. Shafarevich*, Diyofant denklemleri hakkında yeni ve biraz da teknik bir savla çıkagelmişti. 1968'de ise *A. N. Parshin*, Shafarevich savının Mordell savını gerektirdiğini kanıtlamıştı. Sonunda, 1983 yılında genç Alman matematikçi *Gerd Faltings*, Parshin'in savını kanıtladı, dolayısıyla Mordell'inkini de... Bu önemli bir adımdı, ancak Mordell savı $x^n+y^n=z^n$ eşitliğinin sadece sonlu sayıda tamsayı çözümü olabileceğini söylüyordu ve bu sonlu sayının (0'dan farklı çözümleri ele alırsak) Fermat'nın iddia ettiği üzere sıfır olacağını kimse garanti edemezdi. Ama Sezar'ın hakkı Sezar'a, ne de olsa olasılık sonsuzdan sonlu bir sayıya indirilmişti. Daha sonra *D. R. Heath-Brown*, Faltings'in bu yaklaşımıyla biraz oynadı ve n büyüdükçe Fermat'nın iddiasının doğruluğunun %100'e yakınsadığını ispatladı. Yani artık Fermat'nın Son Teoremi "neredeyse" ispatlanmıştı.

Bu "neredeyse" sözcüğünü de ortadan kaldırmak için Diyofant denklemlerine modern bir yaklaşım getiren bir teoriye, eliptik eğriler teorisine yönelmek gerekiyordu. Tamam, "İyi de şimdi bu eliptik eğriler de ne oluyormuş?, diyorsunuz. Biraz açmaya çalışalım: $y^2=ax^3+bx^2+cx+d$ biçimindeki eşitlikleri ele alalım, yani 3. dereceden bir polinoma eşit kareyi... İşte bunlara "eliptik" adı veriliyor, çünkü zayıf da olsa elipsin çevresini veren formülle eğrilerinki arasında bir ilişki var. Bunun da sebebi her eşitliğin koordinatlar sisteminde geometrik bir eğri tanımlaması... Elbette bu cümleleri henüz ben alt alta sıralayamadığımdan bir matematikçinin tanımlamasını veriyorum size. Eliptik eğrilerin göze batan özelliklerinden birisi ise eşitliğin birkaç tamsayı çözümü verildiğinde, bunları diğerlerini de elde etmek için kullanabilmemiz...

Artık buradan hareketle daha önce anlattıklarımızla bir ilinti kurabiliriz, çünkü hatırlarsanız Mordell'in söz konusu yüzeylerinde yalnızca tek bir delik bulabilirsiniz ya da hiç bulamazsınız. Aslında eliptik eğriler Diyofant denklemlerinin de bir alanı olarak nitelendirilebilir. Ancak bu alanın da kendi içinde çözülememiş büyük problemleri vardır ve bunların en büyüğü de (en az adı kadar büyük) *Shimura-Taniyama-Weil* savıdır. Bu savın iddiası her eliptik eğrinin modüler fonksiyonlar cinsinden temsil edilebileceğidir. Belki artık kızmaya başladınız, ama çok kısaca tanımlamak gerekirse modüler fonksiyonlar bilinen trigonometrik fonksiyonların -sinüs ve kosinüs gibi- bir çeşit genelleştirmesidir. Yani bu savda söylenmek istenen, her eliptik eğrinin güzel bir koordinat sistemine sahip olduğudur.

80'lerin başında *Gerhard Frey* tarafından bu savla Fermat'nın Son Teoremi arasında müthiş bir bağ ortaya konmuştur. Frey'in temel stratejisi Fermat'nın eşitliğinin $X^n+Y^n=Z^n$ gibi bir çözümü olduğunu varsayıp bir çelişki elde etmeye uğraşmaktan ibarettir. Hemen belirtelim; burada büyük harf kullanmamızın sebebi, bu durumun yalnızca özel bir çözüm içermesidir. Frey'in incelediği eliptik eğri $y^2=x(x-X^n)(x-Y^n)$ eğrisidir ve uğraşları sonucunda bugün *Frey'in eğrisi* denilen oldukça ilginç bir matematiksel malzeme elde etmiştir. Daha sonra da 1986'da *Kenneth A. Ribet*, Shimura-Taniyama-Weil savının doğrulanması durumunda Frey'in eliptik eğrisinin varolamayacağını ispatlamıştır. Uzun sözün kısası bu da Fermat'nın Son Teoremi'nin tamamıyla ispatlanmış olması demektir.

Elbette, bu büyük bir keşiftir. Çünkü Fermat'nın iddiasının yalnızca gizemli bir problemden ibaret olmadığı ve arkasında matematiğin başka güzelliklerini de sakladığını göstermiştir. *Andrew Wiles*, Ribet'in çalışmasını öğrendiğindeyse artık onun için yeni bir macera başlar. İlk olarak Fermat'nın Son Teoremi'ni kanıtlamak için Shimura-Taniyama-Weil savının tamamını kullanmaya ihtiyaç olmadığını görür, çünkü teorem yalnızca bu savın özel bir durumudur. Problemi altı parçaya ayırır ve bunları tek tek çözer. 1993'te Cambridge'deki Isaac Newton Enstitüsü'nde verdiği üç günlük seminer sonunda Fermat'nın Son Teoremi'nin kanıtını bulduğunu dünyaya ilan eder. Fakat



***Eliptik Eğri Üzerindeki Noktalar:** Düz bir doğru tipik bir eliptik eğriyi üç noktadan keser. Eğer bunların ikisinin koordinatı ilintili oldukları Diyofant denklemlerinde tamsayı çözümlere karşılık geliyorlarsa, o zaman üçüncü nokta da böyle bir tamsayı çözüme karşılık gelir. Böylelikle iki tamsayı çözümü elde ettikten sonra geriye kalan tek şey karşılık gelen iki noktadan bir doğru çizmek ve bu doğrunun eliptik eğriyi kestiği yerleri tespit ederek üçüncü noktanın koordinatlarını hesaplamaktan ibarettir.*

henüz hikayenin son noktası konulmamıştır. Wiles, kanıtını tekrar gözden geçirdiğinde bir takım yanlış noktalarla karşılaşır. Bu sefer tek tek bu yanlışlıkları gidermeye girişir. Ancak geride hâlâ düzeltilemeyen noktalar vardır. Bu arada Weil, Scientific American'daki yazısında şöyle der:

"İspatı oluşturabilmek için Wiles'ın bazı güzel fikirleri olduğuna inanıyorum, ama ispat ortada değil. Bir noktaya kadar Fermat'nın Teoremi'ni ispatlamak Everest'e tırmanmaya benzer. Eğer bir adım Everest'e tırmanmak ister ve 100 metre kala nefesi kesilirse bu Everest'i tırmandığı anlamına gelmez."

1994 yılının başlarından itibaren Wiles, *Richard Taylor* ile ispatındaki boşlukları doldurabilmek için beraber çalışır, ancak sonuca ulaşmaktan uzaktırlar. Daha sonra Wiles'ın süren uğraşıları sırasında birden şu malum şimşek çakar ve 6 Ekim'de üç meslektaşına tamamlanmış ispatını gönderir. 1995 yılında Taylor'ın, Wiles'ın ispatı üzerine verdiği konferansın ardındansa görünen o ki Fermat'nın Son Teoremi üzerinde artık ciddi hiçbir kuşku kalmamıştır.

Wiles, ispatını tamamlayıp 350 yıllık problemin çözümünü ortaya koyduğunda 200 sayfalık bir kağıt tomarı vardır önünde. Bu da elbette Fermat'nın boş kalmış ve sayfa kenarına sığacak bir ispat değildir. Eh, ne de olsa Fermat'nın her zaman bir bildiği vardır!..

Han Nazmi Özsöylev
Bilkent Matematik Topluluğu

Kaynaklar
Cipra, B., "Fermat's Last Theorem Finally Yields", *Science*, 2.7.1993
Devlin, K., "Fermat Watch", *Math Horizons*, Eylül 1994
Edwards, *H. M., Fermat's Last Theorem: A Genetic Introduction to Algebraic Number Theory*, Springer-Verlag, 1977
Ribenboim, P., *13 Lectures on Fermat's Last Theorem*, Springer-Verlag, 1979
Stewart, I., "Fermat's Last Time-Trip", *Scientific American*, Kasım 1993
www-groups.dcs.st-and.ac.uk/history/HistTopics/

Çözmece

1. Eğer n pozitif bir tamsayı ise

$$\frac{n^2+3+1}{n^2+4n+3}$$

kesrinin indirgenemeyeceğini (pay ve paydanın en büyük ortak böleninin 1 olduğunu) gösteriniz.

2. Gerçel (reel) α, β sayıları

$\alpha^3-3\alpha^2+5\alpha-17=0$

$\beta^3-3\beta^2+5\beta+11=0$

eşitliklerini sağlıyor. $\alpha+\beta$ yı bulunuz.

Geçen Ayın Çözümleri

1. $ad=bc$ olduğundan a, bc yi böler. Dolayısıyla x, b yi; y, c yi bölecek ve $a=xy$ olacak biçimde x ve y pozitif tamsayıları vardır. $b=xz$, $c=yt$ olsun. Buradan $(xy)d=(xz)(yt)$ ve bu eşitlikten de $d=zt$ bulunur.

$a^2+b^2+c^2+d^2=x^2y^2+x^2z^2+y^2t^2+z^2t^2$
$=x^2(y^2+z^2)+t^2(y^2+z^2)$
$=(x^2+t^2)(y^2+z^2)$

olduğundan $a^2+b^2+c^2+d^2$ asal sayı olamaz.

2. Her $n>1$ pozitif tamsayısı için $n(n-1)<n^2$ dir. Buradan

$$\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}=\frac{1}{n(n-1)}>\frac{1}{n^2}$$

elde edilir.

$$1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+...+\frac{1}{n^2}$$
$$<1+\left(\frac{1}{2-1}-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{3-1}-\frac{1}{3}\right)+...+\left(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}\right)$$
$$=1+1-\frac{1}{n}$$

olduğundan

$$1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+...<2 \text{ dir.}$$