Oktaniyonlar:
Tüm Fiziği Birleştirmeye Aday Hiperkompleks Sayılar

Dr. Mahir E. Ocak | *TÜBİTAK Bilim ve Teknik Dergisi*

Herhangi bir fiziksel gerçekliğe karşılık gelmeseler de karmaşık sayılar fiziksel kuramlarda önemli bir yer tutuyor. Hatta tüm fiziksel etkileşimleri bir araya getirecek bir büyük birleşik kuram geliştirmenin yolu da çok boyutlu hiperkompleks sayılardan geçiyor olabilir.

hh5800/iStock

Parçacık fiziğinin standart modeli; güçlü kuvvet, zayıf kuvvet ve elektromanyetik kuvvetin kuantum kuramlarını bir araya getiriyor. Her ne kadar çok başarılı bir kuram olsa da standart modelin çeşitli eksiklikleri var. Öncelikle standart model kullanarak tahmin yapabilmek için yaklaşık 20 parametrenin deneylerle ölçülüp kurama dışarıdan eklenmesi gerekiyor. Ayrıca standart model uzayzaman hakkında da herhangi bir şey söylemiyor. Onlarca yıldır pek çok fizikçi standart modeldeki üç etkileşimi tek bir matematiksel çerçevede bir araya getiren bir "büyük birleşik kuram", hatta kütle çekimi de dâhil tüm fiziksel etkileşimleri açıklayan bir "her şeyin teorisi" geliştirmeye çalışıyor. Ancak bugüne kadar bu hedefe ulaşılamadı. Deneylerin doğru kabul edilen kuramlarda eksiklikler ortaya çıkarması ve bu eksiklikleri gidererek bir büyük birleşik kurama ulaşılması bekleniyordu ancak bu durum gerçekleşmedi. Eğer bir büyük birleşik kuram geliştirmek gerçekten de mümkünse, bu amaca ulaşmak için belki de fiziksel kuramları ifade etmek için kullanılan matematiksel dilin değiştirilmesi gerekiyor.

Hiperkompleks Sayılar

Karmaşık sayılar genel olarak $a+ib$ olarak ifade edilir. Burada a ve b herhangi iki gerçel sayıyı, i ise $i^2= -1$ eşitliğini sağlayan bir sanal sayıyı gösterir.

Karesi -1'e eşit bir sayı fiziksel bir gerçekliğe karşılık gelmez. Benzer biçimde hiperkompleks sayılarda da özellikleri gerçel sayılara benzemeyen, fiziksel bir karşılığı olmayan bileşenler bulunur.

Bir sayı kümesinde cebirsel işlemler yapılabilmesi ya da sayı kümesinin cebirsel bir yapıya sahip olması için o sayı kümesindeki elemanlar üzerinde tanımlı iki işlem olması gerekir. Bu işlemler genellikle toplama ve çarpma olarak adlandırılır. Tanımlanan toplama ve çarpma işlemlerinin sonucu, yine aynı sayı kümesi içindeki bir eleman olmalı; yani küme "cebirsel olarak kapalı" olmalıdır.

Hiperkompleks terimi daha çok birden fazla sanal bileşen içeren sayıları ve cebirleri nitelendirmek için kullanılır. Ancak gerçel sayılar ve karmaşık sayılar ile yapılan işlemleri de hiperkompleks sayılarla yapılan cebirsel işlemler gibi düşünmek, başka bir deyişle gerçel sayı ve karmaşık sayı cebirlerini de hiperkompleks cebirler olarak nitelendirmek mümkündür. Hiperkompleks sayıları ve cebirleri anlamak için bu yaklaşımı takip edelim.

Gerçel Sayılar

Gerçel sayıları ae_0 olarak ifade edelim. Burada a herhangi bir gerçel sayı e_0 ise, tıpkı 1 sayısı gibi, $e_0^2 = e_0$ eşitliğini sağlayan bir "birim sayı" olsun. Gerçel sayılarla ilgili tüm işlemleri bu şekilde ifade edilmiş sayılarla da yapabiliriz. Örneğin ae_0 ve be_0 sayılarını toplarken a ve b katsayılarını toplayarak sonucu $(a+b)e_0$ olarak buluruz. Bu iki sayıyı çarptığımızda ise $e_0^2= e_0$ olduğu için $(ae_0)(be_0)=abe_0^2=abe_0$ sonucunu elde ederiz.

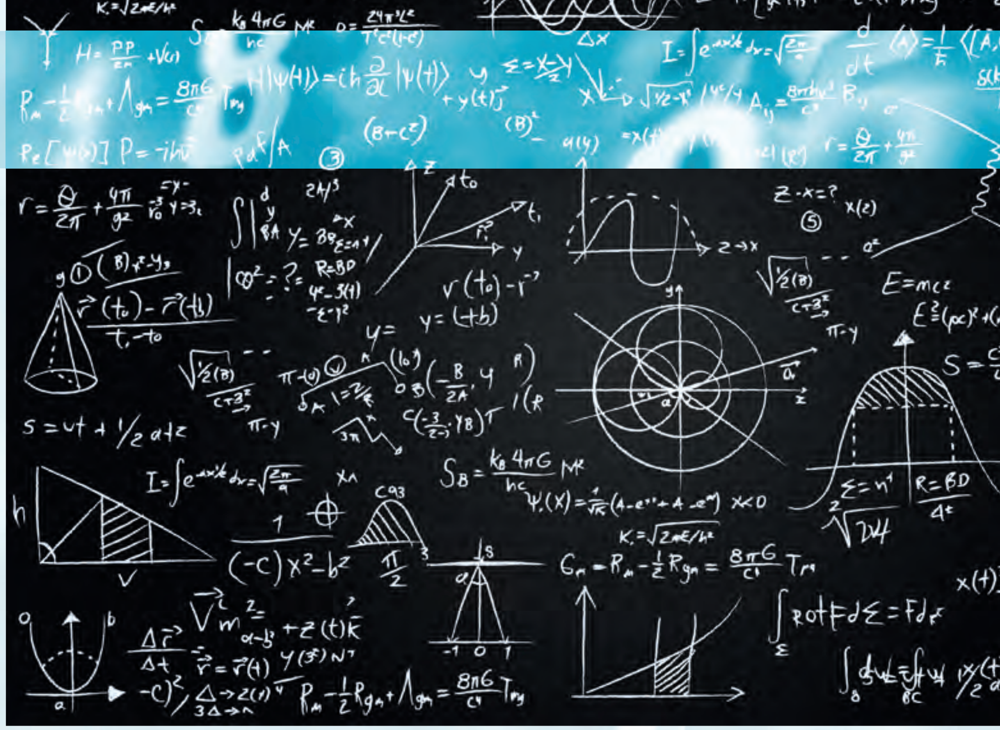
Gerçel sayılarla yapılan toplama ve çarpma işlemlerine hiçbir işlemi etkilemeyen bir e_0 sayısı eklemek gereksiz görülebilir. Ancak daha karmaşık cebirsel sistemleri tanımlarken de aynı birim sayı mantığını kullanacağız.

Karmaşık Sayılar

Karmaşık sayıları $ae_0 + be_1$ olarak ifade edelim. Bu ifadede a ve b herhangi iki gerçel sayı, e_0 ve e_1 ise aşağıdaki tablodaki çarpım koşullarını sağlayan iki birim sayı olsun:

$e_i e_j$		e_j	
		e_0	e_1
e_i	e_0	e_0	e_1
	e_1	e_1	$-e_0$

Karmaşık sayılarda çarpım kuralları



kertis / iStock

Bu birim sayılardan e_0, 1 gerçel sayısının; e_1 ise i sanal sayısının karşılığıdır. Toplama işlemi sırasında aynı tür birim sayıların katsayıları toplanır. Çarpma sırasında ise katsayılar çarpılır, birim sayıların çarpımı içinse yukarıda ifade edilen çarpım kuralları uygulanır. Örneğin ae_0+be_1 ve ce_0+de_1 olarak ifade edilen iki karmaşık sayıyı topladığımızda şu sonucu buluruz: $(ae_0+be_1)+(ce_0+de_1)=(a+c)e_0+(b+d)e_1$. Bu iki sayıyı çarptığımızda ise şu sonucu elde ederiz: $(ae_0+be_1)\,(ce_0+de_1) = ace_0e_0 + ade_0e_1+bce_1e_0+bde_1e_1=ace_0+ade_1+bce_1+bd(-e_0)=(ac-bd)e_0+(ad+bc)e_1$.

İki karmaşık sayının toplamının ve çarpımının sonucu, olması gerektiği gibi, yine bir karmaşık sayıdır.

Vektörler

Vektörleri $ae_1+be_2+ce_3$ olarak ifade edelim. Bu ifadede a, b ve c herhangi üç gerçel sayı, e_1, e_2 ve e_3 ise aşağıdaki tablodaki çarpım koşullarını sağlayan birim sayılar olsun.

e_ie_j		e_j		
		e_1	e_2	e_3
e_i	e_1	0	e_3	$-e_2$
	e_2	$-e_3$	0	e_1
	e_3	e_2	$-e_1$	0

Vektörlerde çarpım kuralları

Bu tablodaki birim sayılar sıklıkla vektörleri ifade etmek için kullanılan **i**,**j**,**k** birim vektörlerinin karşılığıdır. İki vektör toplanırken aynı tür birim sayıların katsayıları toplanır. İki vektör çarpılırken katsayılar çarpılır, birim sayıların çarpımı için de tablodaki kurallar uygulanır. İki vektörün toplamının ve çarpımının sonucu yine bir vektör olduğu için vektörler kümesinde kapalı cebirsel bir yapı vardır.

Vektörlerde herhangi bir gerçel bileşen olmadığına dikkat edelim. Vektörleri ifade etmek için kullanılan birim sayıların hiçbiri gerçel sayılardaki ve karmaşık sayılardaki e_0 birim sayısı gibi $e_0^2=e_0$ eşitliğini sağlamaz. Vektörleri ifade etmek için kullanılan e_1, e_2 ve e_3 birim sayılarının tamamı sanal sayılardır. Ayrıca bu cebirde değişme özelliğinin olmadığını da not edelim. Çarpma işlemlerinin sonucu sayıların hangi sıra ile yazıldığına bağlı olarak değişir. Tablodan da görülebileceği gibi iki birim sayının çarpım sırası değiştiğinde sonucun işareti değişir. Dolayısıyla **a** ve **b** iki vektör olmak üzere **a**x**b** = -**b**x**a** olduğunu kolaylıkla doğrulayabilirsiniz.

andresr / iStock

Toplama ve çarpma işlemlerini örneklendirelim. **a**$=2e_1-e_3$ ve **b**$=3e_2+e_3$ olsun. Bu iki vektörü topladığımızda **a**+**b**$=(2+0)e_1+(-1+3)e_2+(-1+1)e_3=2e_1+2e_2$ sonucunu buluruz. Çarpma işleminin sonucu ise çarpmanın hangi sıra ile yapıldığına bağlı olarak değişir: **a**x**b**$=(2e_1-e_3)\mathrm{x}(3e_2+e_3)=6e_1e_2+2e_1e_3-3e_3e_2-e_3e_3=6e_3-2e_2-3e_1$, **b**x**a**$=(3e_2+e_3)\mathrm{x}(2e_1-e_3)=6e_2e_1-3e_2e_3+2e_3e_1-e_3e_3=-6e_3+3e_1+2e_2$.

$e_i e_j$		e_j			
		e_0	e_1	e_2	e_3
e_i	e_0	e_0	e_1	e_2	e_3
	e_1	e_1	$-e_0$	e_3	$-e_2$
	e_2	e_2	$-e_3$	$-e_0$	e_1
	e_3	e_3	e_2	$-e_1$	$-e_0$

Kuaterniyonlarda çarpım kuralları

Kuaterniyonlar

Kuaterniyonlar, dört ayrı birim sayının lineer kombinasyonu olarak ifade edilir. Bu birim sayılardan e_0, "1" gerçel sayısına benzer: Karesi kendisine eşittir ve çarpım işlemlerinde diğer birim sayıları etkilemez (bkz. aşağıdaki tablo). Kuaterniyonlardaki sanal sayılar e_1, e_2, e_3 ise biraz karmaşık sayılardaki "i"ye (e_1'e) biraz da vektörlerdeki sanal sayılara benzer. Bu sayıların karesi, vektörlerdeki sanal sayıların karesi gibi sıfıra değil, "i"nin karesi gibi "-1"e ($-e_0$'a) eşittir. Bu sanal sayıların kendi aralarındaki çarpım kuralları ise vektörlerdeki sanal sayıların kendi aralarındaki çarpım kurallarının aynısıdır.

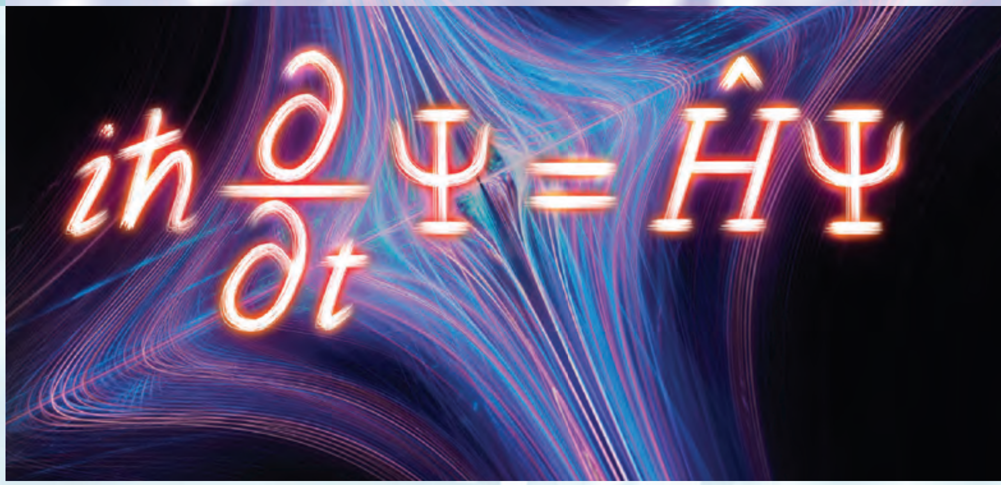
Kuaterniyonların toplanması ve çarpılması, karmaşık sayılar ve vektörlere benzer biçimde yapılır. Örneğin $a= e_1-2e_3$ ve $b=e_0+e_3$ iki kuaterniyon olsun. Bu iki kuaterniyonu topladığımızda ve çarptığımızda şu sonuçları buluruz: $a+b=b+a= e_0+ e_1-e_3$, $axb=e_1 e_0+ e_1 e_3-2e_3 e_0-2e_3 e_3= e_1-e_2-2e_3+ 2e_0$, $bxa=e_0 e_1-2 e_0 e_3+e_3 e_1-2e_3 e_3= e_1-2e_3 + e_2 + 2e_0$. Çarpma işleminin ne gerçel sayılar ve karmaşık sayılardaki gibi simetrik ne de vektörlerdeki gibi antisimetrik olduğuna dikkat ediniz.

Oktaniyonlar

Oktaniyonlar, sekiz ayrı birim sayının lineer kombinasyonu olarak ifade edilen hiperkompleks sayılardır. Oktaniyonları oluşturan birim sayılardan e_0, kuaterniyonlardaki ve karmaşık sayılardaki e_0 sayısı gibi çarpma işleminin etkisiz elemanıdır (bkz. aşağıdaki tablo). Diğer birim sayılar ise kuaterniyonlardaki sanal sayılara benzer. Hepsinin karesi $-e_0$'a eşittir. Farklı iki sanal sayının birbiriyle çarpımının sonucu, sayıların sırası değiştiğinde işaret değiştirir.

Oktaniyonlar toplanırken aynı tür birim sayıların katsayıları toplanır. Oktaniyonlar çarpılırken de yukarıdaki tabloda verilen birim sayıların birbirleriyle çarpılması ile ilgili kurallar uygulanır. Çarpım kuralları ile ilgili tablo dikkatli incelendiğinde, çeşitli kısımlarının kuaterniyonların çarpımı ile ilgili tabloyla benzerlikler taşıdığı görülür. Örneğin sadece e_0, e_1, e_2 ve e_3 ile ilgili kurallara bakıldığında kuaterniyonların çarpım tablosunun aynısı olduğu görülür. Sadece e_0, e_2, e_4 ve e_6 ile ilgili kurallara ya da sadece e_0, e_3, e_4 ve e_7 ile ilgili kurallara bakıldığında ise kuaterniyonların çarpım tablosuyla "aynı yapıda" olduğu dikkat çeker. Bunlara benzer toplam yedi ayrı alt küme bulabilirsiniz.

$e_i e_j$		e_j							
		e_0	e_1	e_2	e_3	e_4	e_5	e_6	e_7
e_i	e_0	e_0	e_1	e_2	e_3	e_4	e_5	e_6	e_7
	e_1	e_1	$-e_0$	e_3	$-e_2$	e_5	$-e_4$	$-e_7$	e_6
	e_2	e_2	$-e_3$	$-e_0$	e_1	e_6	e_7	$-e_4$	$-e_5$
	e_3	e_3	e_2	$-e_1$	$-e_0$	e_7	$-e_6$	e_5	$-e_4$
	e_4	e_4	$-e_5$	$-e_6$	$-e_7$	$-e_0$	e_1	e_2	e_3
	e_5	e_5	e_4	$-e_7$	e_6	$-e_1$	$-e_0$	$-e_3$	e_2
	e_6	e_6	e_7	e_4	$-e_5$	$-e_2$	e_3	$-e_0$	$-e_1$
	e_7	e_7	$-e_6$	e_5	e_4	$-e_3$	$-e_2$	e_1	$-e_0$



Sakkmesterke / SPL

Farklı Boyutlar

Gerçel sayıların bir boyutlu, karmaşık sayıların iki boyutlu, vektörlerin üç boyutlu, kuaterniyonların dört boyutlu, oktaniyonların sekiz boyutlu hiperkompleks sayılar olduğu söylenebilir. Hiperkompkles sayılar ve cebirler sadece 1, 2, 3, 4, ve 8 boyutla sınırlı değil. Herhangi bir sayıda birim sayı içeren hiperkompleks cebirler oluşturulabilir. Ayrıca belirli bir sayıda birim sayı içeren birbirinden farklı sistemler oluşturmak da mümkündür. Yapılması gereken yukarıdaki tablolardaki gibi birim sayılar arasındaki çarpım kurallarını, kapalı cebirsel bir yapı ortaya çıkacak biçimde tanımlamaktır.

Bölme işlemi

Toplama ve çarpma işlemleri bir cebirsel sistemi tanımlamak için yeterli. Ancak iki yardımcı işlemden daha bahsedebiliriz: çıkarma ve bölme. Hiperkompleks sayılarla çıkarma yapmak görece kolaydır ve her zaman mümkündür. Çıkartılacak sayıdaki tüm katsayıların işaretini değiştirir ve toplama yaparsınız. Bölme ise her zaman mümkün değildir. Örneğin vektörleri ele alalım. $4e_1 / 2e_1$ işleminin sonucu hangi “vektör” olabilir? İlk bakışta bu bölme işleminin sonucunun “2” olduğunu düşündüyseniz, “2” sayısının bir vektör olmadığını unutmayın.

Muhtemel cevabı $a\,e_1 + b\,e_2 + c\,e_3$ olarak ifade edip $(a\,e_1 + b\,e_2 + c\,e_3)$x $2e_1 = 4e_1$ eşitliğini çözerek sonucu bulmaya çalışın. Vektörlerin çarpımı ile ilgili kuralları uyguladığınızda, bu eşitliğin herhangi bir çözümünün olmadığını göreceksiniz. $2e_1$ vektörünü hangi vektörle çarparsanız çarpın sonuç hiçbir zaman $4e_1$ olmaz.

Toplama, çıkarma, çarpma ve bölme işlemlerinin tümünün yapılabildiği sayı kümeleri gerçel sayılar, karmaşık sayılar, kuaterniyonlar ve oktaniyonlarla sınırlıdır.

Turac Novruzova / iStock

Fizik ve Hiperkompleks Sayılar

Fiziksel kuramlar doğal süreçlerle ilgili tahminler yapmaya yarar. Kuramların verdiği sayısal sonuçların tamamının gerçeklikle ilişkili olması gerekir. Ancak sanal sayılar da fiziksel kuramlarda önemli bir yer tutar. Kuantum mekaniğinin temeli olan Schrödinger denkleminde “*i*” yer alır. Bu denklemin çözümleri olan dalga fonksiyonlarının değerleri de karmaşık sayılardır. Dalga fonksiyonun kendisi bir fiziksel gerçekliğe karşılık gelmez. Ancak bu karmaşık değerli fonksiyon kullanılarak bir sistemin belirli bir andaki özellikleri hakkında bilgi edinilebilir. Her ne kadar kendisi karmaşık değerli olsa da dalga fonksiyonu kullanılarak yapılan tahminlerin sonuçları gerçektir. Vektörler de modern fizikte önemli bir yer tutar.
Bu üç boyutlu hiperkompleks sayılar, üç boyutlu uzaydaki yönlü büyüklükleri ifade etmek

için kullanılır. Örneğin klasik fizikte konumu, hızı ve ivmeyi ifade etmek için vektörlerden yararlanılır. Kuaterniyonların günümüzde temel fizik eğitiminin önemli bir parçası olduğu söylenemez. Ancak James Clerk Maxwell, 1800'lerin sonlarında elektromanyetik teorinin ilk matematiksel formülasyonunu yaptığında, tüm eşitlikleri kuaterniyonlarla yazmıştı. Dört işlem yapılabilen cebirsel sistemler arasında, bugüne kadar önemli bir uygulama alanı bulmayan sadece oktaniyonlardır. Ancak gelecekte bu durum da değişebilir.

Oktaniyonların Muhtemel Uygulamaları

Pek çok fizikçi, parçacık fiziğinin standart modelindeki üç kuramın tek bir çatı altında birleştirilebileceğini düşünüyor. Bu amaca ulaşmak için odaklanılan konulardan biri de fiziksel kuramlardaki simetrilerdir. Standart modeldeki her bir kuramın kendi iç simetrileri vardır. Matematiksel eşitliklere çeşitli simetri işlemleri uyguladığınızda değişmeden kaldıklarını görürsünüz. Elektromanyetik kuvvet, güçlü kuvvet ve zayıf kuvveti bir araya getirecek bir büyük birleşik kuramın bu üç kuramdan çok daha simetrik olması, bu üç kuramdaki tüm simetrilerin yanı sıra başka simetriler de içermesi beklenir. Bu kuramın evrenin ilk zamanlarda, enerji yoğunluğunun çok daha yüksekken doğada var olan simetrileri içerdiği düşünülüyor. Zamanla evrenin enerji yoğunluğu düştükçe çeşitli "simetri kırılmaları" yaşandı. Her bir simetri kırılması doğal süreçlerin daha düşük simetrilere sahip kuramlarla açıklanabilecek hâle gelmesiyle sonuçlandı. Büyük birleşik kuramın adaylarından biri spin(10) modeli olarak adlandırılan 45 simetrili bir model. Spin(10) modeli, 21 simetrili Pati-Salam modelini; Pati-Salam modeli, 15 simetrili sağ-sol simetrik modeli; sağ-sol simetrik model de 12 simetrili standart modeli kapsıyor. Her bir aşamada hangi simetrilerin kırıldığını belirleyen şeyin ne olduğu bilinmiyor. Ancak Humboldt Üniversitesinden Nichol Furey ve Imperial College London'dan Mia Hughes tarafından yapılan çalışmalar oktaniyonların bu soruya bir cevap verebileceğine işaret ediyor. Hatta elde edilecek sonuçlar deneylerle test edilebilecek tahminler yapılmasını sağlayabilir.

Oktaniyonların muhtemel uygulama alanlarından biri de bir kuantum kütle çekimi teorisi geliştirilmesi. Pascual Jordan, 1930'larda Eugene Wigner ve John von Neumann ile yaptığı çalışmalar sırasında kuantum mekaniğinin matematiksel özelliklerinde oktaniyonlar ile yakından ilişkili cebirsel yapılar keşfetmişti. "İstisnai Jordan cebiri" diye adlandırılan bu cebir, dört boyutlu uzayzamanı tanımlamak için kullanılan matematiksel yapıyı da kapsıyor. Dolayısıyla oktaniyonlar kuantum mekaniği ile kütleçekimini bir araya getirecek yolu açabilir.

Sonuç

Bir büyük birleşik kuramın ve hatta bir her şeyin teorisinin geliştirilmesinde oktaniyonların yararlı olabileceğini gösteren araştırmalar var. Bu sekiz boyutlu hiperkompleks sayıların kuramsal fizikte ne ölçüde yararlı olacağını zaman gösterecek. ■

Kaynak

Brooks, M., "Octanions: The strange maths that could unite the laws of nature", *New Scientist*, https://www.newscientist.com/article/0-octonions-the-strange-maths-that-could-unite-the-laws-of-nature/, 2022.