Ökliddışı Geometri

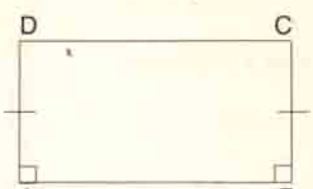
Öklid'in beşinci postulatını kanıtlama girişimleri binlerce yıl sürmüştür ve kanıt verilememiştir ama bu, yapılan tüm çalışmaların yararsız olduğu anlamına gelmemelidir. Özellikle, İtalyan Jesuit papazı Girolamo Saccheri'nin çalışmaları kayda değerdir. Saccheri, postulatın yanlış olduğunu varsayıp bir çelişkiye ulaşmayı amaçlıyordu ve bunu yaparken farkında olmadan Ökliddışı geometriye ilişkin bir çok teoremi elde ediyordu.

Saccheri bir AB doğru parçasına A noktasında dik olan AD doğru parçasını çizdi. Daha sonra, AB doğru parçasına B'de dik olacak ve uzunluğu $[AD]$ nin uzunluğuna eşit olacak şekilde BC doğru parçasını çizdi. Öklid'in ilk dört postulatını kullanarak, $\overset{\frown}{ABCD}$ dörtgeninde $m(\widehat{C}) = m(\widehat{D})$ olduğunu gösterebiliyordu. Daha sonra problemi üç duruma ayırdı:

(1) $\widehat{C}$ ve $\widehat{D}$ dik açıdır

(2) $\widehat{C}$ ve $\widehat{D}$ geniş açıdır

(3) $\widehat{C}$ ve $\widehat{D}$ dar açıdır.



Saccheri, ikinci durumun bir çelişkiye ulaştırdığını kanıtlar ama üçüncü durumu çürütemez ve dolayısıyla o da beşinci postulatın kanıtına ulaşamaz.

Saccheri'nin çalışmalarından 30 yıl kadar sonra, 5. postulatı inceleyen bir diğer önemli çalışma da Heinrich Lambert'e aittir. Saccheri'nin yaptıklarından habersiz olan Lambert de dörtgenleri incelemiş ve Saccheri'nin ulaştığı birtakım sonuçları elde etmiştir.

Lambert'i izleyen yıllarda, ünlü Fransız matematikçisi Legendre, 5. postulat üzerine önemli çalışmalar yaptı. Lambert ve Legendre'nin çalışmaları Saccheri'nin yaptıklarından belki biraz daha ileriydi ama ikisi de postulatı kanıtlama çabası içinde bir çembere takılı kaldılar, hem de Ökliddışı geometriyi keşfetmenin çok yakınından geçerek.

Öklid'in geometrisinden başka bir geometrinin de varolabileceğini ilk farkeden Gauss olmuştur. Gauss, Öklid'in 5. postulatı yerine, ona denk olan ve Playfair aksiyomu ya da 'paralel postulatı' diye de anılan "Bir doğruya, dışındaki bir noktadan bir ve yalnız bir paralel çizilebilir." önermesini ele aldı. Bu postulatı kaldırarak, daha doğrusu kabul etmeyerek, bir doğruya, dışındaki bir noktadan birden fazla paralelin çizilebildiği bir geometri tasarladı. Bu yeni varsayımın diğer varsayımlarla, yani Öklid'in ilk dört postulatıyla çelişmeyeceğini hissetmeye başlamıştı. Çünkü yaptığı çalışmalar sonucunda kendi içinde tutarlı bir çok sonuç elde etti. Eleştiriye hiç de açık olmayan bir kişi olan Gauss, bu çalışmaların tepkiyle karşılanacağını düşündüğünden, bulduklarını yayımlama yoluna gitmedi. Bunlardan, yalnızca yakın arkadaşlarına yazdığı mektuplarda söz etti.

Gauss'un buluşlarından bir süre sonra, benzer incelemeleri Macar matematikçi Jànos Bolyai yaptı. Henüz 21 yaşındayken elde ettiği sonuçları, bir matematik profesörü olan babasına yazdığı mektupta şöyle yorumluyordu:

"Hiç yoktan, son derece garip, yeni bir dünya oluşturdum."

Bolyai, bu yeni geometrinin üzerinde uzun bir süre çalışır ve babasının 1831'de yayımlanan *Tentamen* adlı kitabının sonunda 26 sayfalık bir ek olarak çalışmalarını yayımlar. Bolyai, yazısına "Uzayın Soyut Bilimi" başlığını atmıştır.

Gauss'un yakın bir arkadaşı olan Baba Bolyai, oğlunun eserinin de içinde bulunduğu yeni kitabının bir kopyasını Gauss'a gönderir ama Gauss'un verdiği yanıt Bolyai'leri şaşkınlığa uğratır:

"Böyle bir çalışmayı övmekten kaçınacağımı söylemekle başlarsam sözlerime, bir an için şaşıracaksın elbette. Ama başka türlü yapamam: Oğlunun çalışmasını övmek, kendimi övmem olacaktır? Çünkü çalışmanın tüm içeriği, tutulan yol, ulaşılan sonuçlar hemen tümüyle benim son otuz, otuz beş yıl boyunca kafamı işgal eden düşüncelerle çakışmaktadır. İşte bu yüzden oğlunun çalışması benim için tam bir sürpriz olmuştur.

Niyetim, şimdiye dek pek az bir bölümü yayımlanmış olan çalışmamı, kendi yaşam dönemimde, saklı tutmaktı. İnsanların büyük çoğunluğu bizim ulaştığımız sonuçları anlama yeteneğinden yoksundur. Temas ettiğim kimselerin pek azında beklediğim ilgiyi bulabildim. Bu tür şeyleri anlamak için kişinin her şeyden önce keskin bir algı gücüne sahip olması gerekir. Oysa bu noktada çoğunluk tam bir yetersizlik içindedir. Öte yandan, ulaştığım sonuçları, benimle birlikte yok olmaması için, bir an önce kağıda dökmeyi de planlamaktaydım.

Şimdi bu çabadan kurtulduğuma memnunum ve beni asıl sevindiren şey, beni bu önemli çalışmada geride bırakan kişinin eski arkadaşımın oğlu olmasıdır."

Jànos Bolyai

N. I. Lobaçevski

Gauss'un bu mektubu Jànos Bolyai'yi hayal kırıklığına uğratmıştır ve bu mektuptan sonra Bolyai çalışmalarını bir daha yayımlamaz.

Bolyai'nin araştırmasının yayımlanmasından iki yıl önce, yani 1829'da Kazan üniversitesi'nden Rus Matematikçi Lobaçevski, Bolyai ve Gauss'un çalışmalarının benzeri bir çalışma yayımlamıştır. Lobaçevski, *"Paraleller Kuramı Üzerine Geometrik Araştırmalar"* adını verdiği çalışmasını 1840'da Almanya'da, 1855'te de Fransa'da yayımlatır, ama Avrupa'da da yeterince ilgi uyandıramaz.

Ökliddışı geometrinin, matematikçilerin gündemine girmesi ancak Gauss'un 1855'teki ölümünden sonra, yazışmalarının yayımlanmasıyla gerçekleşir. Bir çok matematikçi, Öklid geometrisinin dışında geometrilerin olabileceğini kabul eder ve Öklid'in 5. postulatı başka yeni postulatlarla değiştirilerek yeni geometriler hedeflenir.

Gauss'la matematik dünyasının zirvesine ulaşan Göttingen Üniversitesi, Bernhard Riemann, Peter Gustav Dirichlet ve David Hilbert gibi büyük matematikçilerle bu yerini korumuştur. Bolyai-Lobaçevski modelinden sonraki ikinci önemli Ökliddışı model de, Riemann'ın Göttingen'de verdiği derslerde ortaya çıkar. Riemann, Öklid'in 1., 2. ve 5. postulatlarını şu yenileriyle değiştirir:

(1') İki farklı nokta en az bir doğru belirler.

(2') Bir doğru sınırsızdır.

(5') Bir düzlemdeki herhangi iki doğru kesişir (ya da paralel doğrular yoktur).

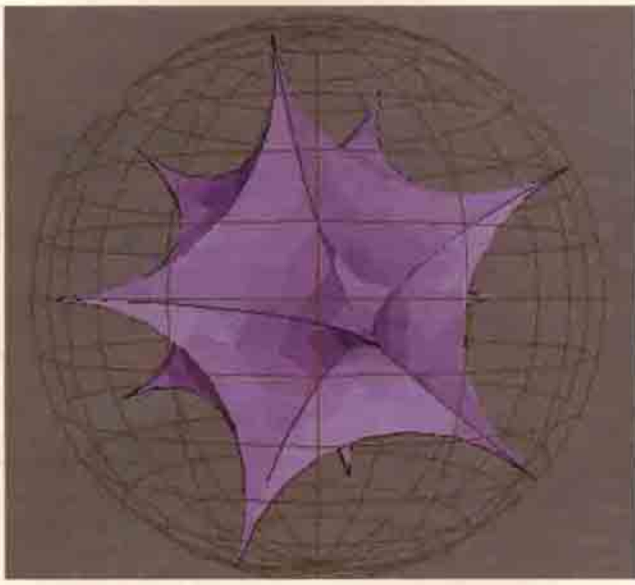
Bugün Lobaçevski'nin geometrisi hiperbolik geometri olarak anılırken, Riemann'ın sistemi eliptik geometrik olarak adlandırılır.

Hangisi Doğru?

Peki bu geometrilerin hangisi doğruydu? Bu soru matematikçilerin sorusu değildi tabii ki. Matematiksel doğrunun ne olduğu açıktır. Başlangıç aksiyomlarından yola çıkarak kanıtlanabilen bir önerme doğrudur. Dolayısıyla matematiksel bir önermenin doğruluğu, ilgili bulunduğu sistemin aksiyomlarına bağlıdır. Matematikçilerin yanıtını merak ettikleri soruysa şuydu: Bu geometriler kendi içinde tutarlı mı? Yani aksiyom ve postulatlardan yola çıkarak birbiriyle çelişen önermeler elde edilme olasılığı var mıydı? Bu matematiksel bir sistem için istenmeyen bir özelliktir, daha doğrusu böyle bir sonuç bu sistemi matematiksel olmaktan çıkarır.

İtalyan matematikçisi Beltrami, 1868'de bu soruların yanıtını verdi. Ökliddışı geometriler kendi içinde tutarlılar ve Öklid'in beşinci postulatı diğerlerinden elde

Bernhard Riemann



edilemez ve Öklid geometrisi de kendi içinde tutarlıdır.

Gelelim ilk soruya: Bu sorunun matematikte anlamsız olduğunu belirttik ama fizikte, astronomide ve diğer bir çok bilimde çok önemli bir soru olduğunu söylemeliyiz. Acaba evren bu geometrilerden hangisine uyuyor? Yapılacak sıradan deneyler, herşeyin Öklid geometrisine göre olduğunu gösteriyor. Zaten Öklid de aksiyomlarını gözlemlerinden yola çıkarak koymadı mı? İnsanlar binlerce yıl boyunca evrenin Öklid geometrisine tamamıyla uyduğunu düşündü. 18. yüzyılın büyük filozofu Kant, Öklid geometrisinden başka bir geometriye olanak tanımak bir yana, öyle bir geometrinin düşünülmesinin bile olanaksızlığından söz etmişti.

Gauss, Öklid geometrisine ilişkin büyük ölçekli bir deney yaptı. Gauss'un en önemli deney malzemesi, o zamana kadar ölçülen en büyük üçgendi. Bu üçgenin köşeleri Hohenhagen, Brocken ve Inselsberg dağlarının zirveleriydi. HBI üçgeninde BI kenarı 107 km idi. Gauss'un amacı bu üçgenin iç açılar toplamının 180° olup olmadığını kontrol etmekti. Bunu yapmak için ilk önce "heliotrop"u icat etti. Bu araç, güneş ışığını istenilen bir yönde yansıtabiliyor ve çok hassas ölçüm yapmaya olanak sağlıyordu. Gauss, hesabı yaptığında toplamın 180'e çok yakın olduğunu gördü. Bu tabii ki Öklid geometrisinin evrene uyduğunu kanıtlamıyordu ama uymadığını da söylemiyordu (Üçgenin iç açılar toplamının 180° olduğu önermesi 5. postulata denktir). Belki de Gauss yeterince büyük bir üçgen seçememişti. Ama dünya üzerinde yapılan ölçümler gösteriyor ki dünyamızda Öklid geometrisini uygulamak oldukça elverişlidir ve yıkılan binaların, köprülerin ya da Bubka'nın 6,5 metreyi atlayamamasının nedeni Öklid geometrisini kullanıyor olmamız değildir.

Bir Örnek

Öklidddışı geometri üzerine araştırma yapanlardan biri de Fransız matematikçisi ve kuramsal fizikçisi Henri Poincaré'dir. Her ne kadar Poincaré, hiçbir deneysel testin fiziksel uzaya ilişkin Öklid anlayışını geçersiz saymamız için yeterli kanıt oluşturmayacağını söylese de, kendisi de Öklidddışı modeller oluşturmuştu. Poincaré'nin üç boyutlu hiperbolik uzal modelinde, uzay, birim küreydi. Birim kürenin yüzeyini dik açıyla kesen çember parçaları yeni doğrularımızı, birim küreyle dik kesişen küre parçalarıysa, yeni düzlemlerimizi oluşturuyordu. Yukarıdaki şekil, bu modelde bir *düzgün yirmiyüzlü*dür.

Evrenin Geometrisi

Öklid geometrisi şu küçük dünyamıza pekala uyuyor ama acaba sözkonusu uzaklıklar ışık yılıyla ölçülmeye başlandığında, gezegenlerin, yıldızların ilişkileriyle ilgilenildiğinde acaba her şeyi açıklıyor mu?

Einstein'ın, yüzyılımızın başlarında 'genel görelilik kuramı'nı oluştururken tasarladığı evren modeline Öklid geometrisi uymuyordu. İşte bu anda Einstein'in yardımına Riemann yetişti. Einstein, kuramında Riemann geometrisini kullandı ve matematiğin devrimini, fiziğin yaratacağı devrimde kullanmış oldu. Riemann geometrisinin uzay yorumuna ilişkin, Einstein şu sözleri ediyor: "Bu yoruma büyük önem veriyorum. Ondan haberim olmasaydı, genel görelilik kuramını hiçbir zaman geliştiremeyecektim."

Gerçekten de Öklidddışı geometri yalnızca matematikte değil diğer bilimlerde, özellikle fizikte, astronomide ve felsefede büyük yenilikler getirmiştir.

Ve Sanat...

Öklidddışı geometrinin popülerlik kazanması, sanat çevrelerinde de yankı uyandırmasını sağladı. İkibin yıldır tartışmasız tek geometri kabul edilen Öklid geometrisinin ve onun aksiyomlarının karşısına bir başkasının konması adeta bir geleneğin yıkılmasıydı. Bu anlamıyla Öklidddışı geometrinin sanatta yansımalarını bulması herhalde şaşırtıcı olmaz. 20. yüzyılın başlarında kimi sanatçılar için Öklidddışı geometri, geleneklere karşı çıkış ve devrimle eşanlamlıydı. Yeni geometirin en çok etkilediği sanatçılar hiç kuşkusuz ressamlardı.

Öklid geometrisinde hareket eden şekiller herhangi bir değişikliğe uğramıyor ve özelliklerini koruyordu. Öklidddışı geometride böyle bir zorunluluğun olmadığını Riemann göstermiştir. Eğriliğin sabit ya da düzenli olmadığı bir yüzeyde ya da uzayda bir şeklin biçim değiştirmeden ve özelliklerini koruyarak yer değiştirmesi olanaksız gibidir. İşte böyle bir geometri Kübistler ve Marchel Duchamp tarafından ilgiyle karşılandı. Bir çok ressam, Riemann'ın eğri uzay düşüncesini resimlerinde kullandılar.

Öklidddışı geometri, Kopernik'in astronomide ya da Darwin'in biyolojide yarattığı değişimi, sadece matematikte değil diğer bilimlerde, felsefede ve sanatta da yarattı. Ama Öklidddışı geometri kendisine hiç bir bilimde uygulama bulamamış olsaydı da, o soyut güzelliğiyle yine sohbetlerimize konu olacaktı.

Aytek Erdil
Bilkent Matematik Topluluğu

Kaynaklar
Henderson, L. D., *The Fourth Dimension and Non-Euclidean Geometry in Modern Art*, Princeton University Press, New Jersey, 1983
Trudeau, R. J., *The Non-Euclidean Revolution*, Birkhäuser, Boston, 1987
Yıldırım, C., *Matematiksel Düşünme*, İstanbul, 1996
www.geom.umn.edu/docs/forum/hype/model.html

Çözmece

1. a,b,c,d; $ad=bc$ olacak şekilde pozitif tamsayılarsa, $a^2+b^2+c^2+d^2$ nin asal olmadığını kanıtlayınız.

2. $\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+...<2$

olduğunu kanıtlayınız.

Geçen Ayın Çözümleri

1.

$x=\sqrt[3]{1/3}$ ve $y=\sqrt[3]{2/3}$ diyelim

$x^3+y^3=(x+y)(x^2-xy+y^2)$ olduğundan

$\frac{1}{3}+\frac{2}{3}=1$

$=(x+y)(\sqrt[3]{1/9}-\sqrt[3]{2/9}+\sqrt[3]{4/9})$ dir.

$(x+y)^3(\sqrt[3]{2}-1)$

$=(\frac{1}{3}+\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{4}+\frac{2}{3})(\sqrt[3]{2}-1)$

$=\left[(\sqrt[3]{2})^2+\sqrt[3]{2}+1\right](\sqrt[3]{2}-1)$

$=2-1=1$ dir.

Buradan

$$\frac{1}{x+y}=(\sqrt[3]{2}-1)^{1/3}$$

elde edilir ve böylece

$(\sqrt[3]{2}-1)^{1/3}=\sqrt[3]{1/9}-\sqrt[3]{2/9}+\sqrt[3]{4/9}$

olduğu bulunur.

2. Üçgeni $A=(0,1)$, $B=(1,0)$, $C=(0,0)$ olacak şekilde gerçel koordinat düzlemine yerleştirelim. D, E, F, G noktaları sırasıyla

$(\sqrt{2}-1, 2-\sqrt{2}), (\sqrt{2}-1, 0), (2-\sqrt{2}, \sqrt{2}-1)$

olsun. a, b, c, d, e, f, g sırasıyla A, B, C, D, D, E, F, G noktalarının renkleri olsun. $a=b$ ise

$$|AB|>2-\sqrt{2}$$

olduğundan, A, B istenen koşulları sağlayan iki nokta olur. $a\neq b$ olduğu duruma bakalım: C, D, E, F, G noktalarının A ve B den uzaklıkları $2-\sqrt{2}$ den az değildir. c, d, e, f, g den herhangi biri a ya da b ye eşitse yine istenen koşulları sağlayan iki nokta bulmuş oluruz. c, d, e, f, g nin hiçbiri a ya ya da b ye eşit değilse: Toplam dört farklı renk olduğundan ve a ve b farklı renkte olduklarından, $\{c, d, e, f, g\}$ kümesinde iki farklı renk vardır. Bu yüzden c, d, e, f, g den en az üçü aynı renktir. Yani, ya $c=d$, ya $d=e$, ya $e=f$, ya $f=g$ ya da $g=c$ dir. Ama $|CD|$, $|DE|$, $|EF|$, $|FG|$, $|GC|$ uzunluklarının her biri en azından $2-\sqrt{2}$ olduğundan, bu durumda da istenen koşullarda iki nokta bulunabilir. Sonuç olarak, boyama nasıl yapılırsa yapılsın, aralarındaki uzaklık en azından $2-\sqrt{2}$ olan aynı renkli iki nokta vardır.