Çerçi

Şahin Koçak

Matematikte Yapısalcılık

2000 yıllık Öklid serüveninin soğuk bir duş gibi gelen ayıktırıcı çözümü, sadece Öklidyen olmayan geometrileri gün ışığına çıkarmış olmaktan ibaret kalsaydı, herhalde şaşkınlık bir süre sonra geçer ve mesele de küllenir giderdi. Ama matematik bu büyük ayıkmayı izleyen yüz yıl içinde kökten bir değişime uğradı ve tümüyle yapısalcı bir bilime dönüştü. Yapısalcılık deyince akla belki dilbilim ve kültürel antropoloji gibi bilim dalları geliyor ama, yapısalcılığın en saf şekliyle hüküm sürdüğü bilim dalı matematiktir. Öklidyen olmayan geometrilerin getirdiği aydınlanmadan sonra matematik tam bir başkalaşım geçirerek yapıların ve bunların modellerinin incelenmesine dönüşmüştür.

Ben Orhan Ş. İçen'in hatırasına "kalıp" ve ona uysun diye "ayak" dedim ama, kalıba genellikle yapı, strüktür veya "aksiyomatik sistem", ayağa da "model" deniyor. Tabii bu modelleri foto-modellerle karıştırmamak lazım. Ama aslında bazı benzerlikler de yok değil. Bir kişinin foto-model olabilmesi için belli bazı ölçülere ve özelliklere sahip olması gerekiyor. Gerisi o kadar önemli değil. Bizim modeller için de (yani matematikteki modeller için de) önemli olan, sözkonusu yapının ya da aksiyomatik sistemin temel koşullarını (yani aksiyomlarını) sağlamaları. Gerisi önemli değil.

Modellerin, aksiyomatik sistem için gerekli olmayan, ya da onunla hiç ilgisi olmayan yönleri olabilir. Aslında bu kaçınılmazdır da. Çünkü model daima somut olmak zorundadır. Ve her somut objenin (ya da sistemin) sayısız ayrıntısı vardır. Kimi bir açıdan önemli, kimi başka bir açıdan, kimi de belki tümüyle rastlantısal ve önemsiz. Somut obje ya da sistem, hangi aksiyomatik sisteme modellik edecekse, ona uyan çehresi öne çıkıyor ve önem kazanıyor. Bu arada, bir yanlış anlamaya da yol açmak istemem: Somut bir obje, nesne ya da sistemden söz ederken, ille de elle tutulabilecek fiziksel nesnelerden söz etmiyorum. Bunlar, durumlar, eylemler, olanaklar ve her türlü zihinsel nesneler ve kurgular olabilir. Önemli olan, bunların tasavvur gücümüzün imkân verdiği ve konunun gerektirdiği ayrıntıda ve netlikte tanımlanmış ve kimlik kazanmış olmasıdır. Düşünülebilen her şey bu anlamda vardır. Yeter ki başkaları sizin ne düşündüğünüz konusunda tereddüte düşmesinler (tabii eğer onlarla iletişmek istiyorsanız).

Örneğin bir askerin hazırol vaziyetinde durması bir nesnedir. Aynı askerin, bulunduğu yerde kendi ekseni etrafında 180° dönmesi (yani geriye dönmesi) ve gene hazırol vaziyetinde durması, yani bu hareket, bir başka nesnedir. Bu nesnelere "*Dur*" ve "*Dön*" diyelim ve bunlardan oluşan iki elemanlı kümeyi *{Dur, Dön}* olarak gösterelim. Bu basit sistemin elemanları arasında doğal bazı ilişkiler tanımlanabilir. Örneğin askerin iki kere dönmesi, tekrar eski yerinde durması demektir. Somut sistemlerle böyle iyi tanımlanmış, zihinde boşluk ve tereddüt yaratmayan sistemleri kastediyorum.

Aksiyomatik sistemlere gelince, içinde ne olduğu kesinlikle belli olmayan birtakım kapalı kutulardan oluşan, fakat kutular arası ilişkilerin çok dikkatle tanımlanmış olduğu sistemleri kastediyorum. Bir örnek vermem, belki bu anlamsız laflara biraz anlam kazandırabilir:

Bir küme düşünelim, fakat bunun elemanlarının neler olduğunu bilmeyelim. Bu kişilerin, pardon elemanların hepsi birer kutuya kapatılıp, kutuların üzerleri bantlanmış olsun. Bu elemanlar arası ilişkiler ise şu mahiyette olsun: İki eleman kutulardan çıkartılıp bir araya getirildiği zaman, o iki eleman kümeden herhangi bir elemanı seçsinler (bu eleman, seçimi yapan o iki elemandan birisi de olabilir). Şunu da belirteyim ki, seçimi yapacak iki eleman aynı elemanlar da olabilir, yani bir eleman "kendimle başbaşa kalsam, şunu seçerdim" diyebilir.

x ve y gibi iki elemanın bir araya gelerek seçtikleri elemanı $x + y$ ile gösterelim. İlginç veya önemli veya faydalı sistemlerin ortaya çıkabilmesi için bu seçimlerin gelişigüzel olmaması gerekir. Ben bu örnekte bu seçimlerin şu koşullara uyacak şekilde yapılmasını isteyeceğim: (Bunlar sistemin kanunları, ya da aksiyomları)

1. $x + y = y + x$

Yani x ve y elemanlarının yaptığı seçim, y ve x elemanlarının yaptığı seçimle aynı olsun. Ben önceydim, sen önceydin yok.

2. $(x + y) + z = x + (y + z)$

x, y ve z gibi üç eleman bir araya gelerek bir seçim yapmaya kalksalar ne olurdu acaba? Biz sadece iki elemanın bir araya gelerek bir seçim yapmalarına izin verdik. Ancak, üç eleman aralarında şöyle bir yola başvurabilirler: Önce x

ve y bir seçim yaparlar, diyelim ki bir t delegesi seçerler; sonra t ve z bir araya gelerek seçimlerini yaparlar: Böyle seçilen elemana u diyelim. Ama önce x ve y değil de, y ve z bir araya gelerek bir v delegesi seçerler ve sonra x ve v bir araya gelerek bir w seçerlerse ne olacak? Koşulumuz işte bu durumda $u = w$ olması, yani sonucun değişmemesidir.

Peki, önce x ve z bir araya gelerek bir delege seçerler ve sonra o delege ile y bir seçim yaparlarsa sonuç ne olur?

$(x+z)+y = x+(z+y)$ (2. Koşula göre)

$= x+(y+z)$ (1. Koşula göre)

Demek ki sonuç değişmezmiş. (Burada bir ispat yapmış olduk!) (İsterseniz hemen bir teorem daha kanıtlayabilirsiniz: Bu sistemde sonlu sayıda kaç eleman bir araya gelirlerse gelsinler, kavgasız bir seçim yapabilirler.)

3.Nazik elemanın varlığı: Öyle bir eleman var olsun ki, başka hangi elemanla bir araya gelerek bir seçim yaparsa yapsın, o elemanın seçilmesini kabullensin: Bu elemanı 0 ile gösterecek olursak: $x + 0 = x$.

(İki farklı nazik elemanın olamayacağını hemen görebiliriz: Diyelim ki θ elemanı da nazik olsun. Bizim nazik elemanla bu eleman bir araya gelip bir seçim yaptıklarında sonuç ne olur? $0 + \theta = ?$ Her biri diğerine nezaket göstereceği için sonuç hem 0, hem θ olur, yani $\theta = 0$ olur.)

4.Ters elemanın varlığı: Her x elemanı için $(-x)$ ile göstereceğimiz öyle aksi bir eleman var olsun ki, bu ikisi bir araya geldiklerinde ancak nazik elemanda uzlaşabilsinler: $x + (-x) = 0$.

(Her elemanın tersinin de tek olduğunu n'olur gösterin.)

Böylece bir aksiyomatik sistem, ya da matematiksel bir yapı yaratmış olduk. Şimdi birisi çıkar, kendi kutularıyla gelir, kutulardan tamamen belirli, "somut" tavşanları, pardon elemanları ortaya çıkartır, herhangi iki elemanın kimi seçtiğini de söylerse, artık gerisi merak edene kalıyor. Merak eden, yukarıdaki dört koşulun sağlanıp sağlanmadığını yani seçimlerin usulüne uygun olarak yapılıp yapılmadığını kontrol edebilir. Eğer koşullar gerçekten sağlanıyorsa, bu aksiyomatik sistem için, bir model verilmiş, yani bu kalıba uyan bir ayak bulunmuş olur. Şimdi size bu aksiyomatik sistem için, hazırol vaziyetindeki askerin hareketlerini kullanarak, çok basit bir model vereceğim.

Kümemiz: *{Dur, Dön}*

Seçim Kuralımız: İki hareket verildiğinde, bunları ardarda uygulayalım; sonuç ne çıkıyorsa, verilen iki eleman onu seçmiş olsun. Yani,

Dur + Dön = Dön, Dön + Dur = Dön

Dur + Dur = Dur, Dön + Dön = Dur.

(Son ilişki iki kere geriye dönen askerin tekrar ilk konumuna geldiğini ifade ediyor.)

Şimdi artık aksiyomları kontrol edebilirsiniz. İlk aksiyomun doğruluğu hemen görülüyor. Üşenmezseniz, x, y ve z için *Dur* ve *Dön*'leri nasıl seçerseniz seçin, ikinci aksiyomun da sağlandığını görebilirsiniz. Üçüncü aksiyom da sağlanır, çünkü *Dur* elemanının nazik bir eleman olduğu hemen belli oluyor. Son aksiyoma gelince, o da hoş bir şekilde sağlanıyor: *Dur*'un tersi *Dur*, *Dön*'ün tersi *Dön*. Böylece şimdilik söylenebilecek birşey kalmıyor: Bir aksiyomatik sistem ve onun için bir model vermiş olduk.

Bu sistemi ve modeli öğrendiğim gençlik günlerimde, ilk şaşkınlığı üzerimden attıktan sonra, aşağıdaki iki modelle çıkıp gelmiş ve ileri geri konuşarak asistanlarımızı biraz kızdırmıştım:

Yukarıdaki modele 1. Model diyecek olursak,

2. model: Çocukların da bilip, sevdiği tek-çift oyunu:

Küme = *{Tek, Çift}*

Seçim Kuralları:

Tek + Tek = Çift, Tek + Çift = Tek

Çift + Tek = Tek, Çift + Çift = Çift

3. model:

Küme = *{Dur, Sola Dön, Sağa Dön, Geriye Dön}*

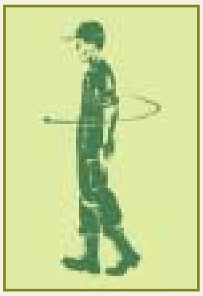
Seçim Kuralları:

Dur + Sola Dön = Sola Dön

Sola Dön + Sağa Dön = Dur

Sola Dön + Geriye Dön = Sağa Dön

vs.



Bu örnekleri verdikten sonra dedim ki, sizin bu aksiyomatik yönteminiz hiçbir işe yaramaz. Bir sürü alakasız model aynı aksiyomatik sistemi sağlıyor. Haydi diyelim ki 1. ve 2. modeller bir şekilde aynı, ama 3. model ne demek oluyor? Kaldı ki böyle daha sayısız model düşünülebilir. Bir kalıba kaç ayak girecek? Bu nasıl bir ayakkabı?

Bana dediler ki, bazan zayıflık güçtür. Bazan az söz çok şey söyler. Çok söz sahibini bağlar. Aksiyomların azsa, ona çok model uyar. Ve modellere referansta bulunmadan sadece aksiyomlardan çıkartabileceğin sonuçlar bütün modeller için geçerli olur. Bir taşla bin kuş vurmuş olursun. Hiç görmediğin modeller için teoremler ispatlamış olursun. Böyle mucize olur mu? Ama aksiyomların çoksa onlara uyabilecek modeller azalır. Bazan aksiyomlar azsa bile onlara uyacak model olmayabilir. Böyle aksiyomlar tabii ki bir işe yaramaz. Diğer yandan, bu düşünce aleti, iki tarafı da keskin bir bıçaktır. Öyle aksiyom sistemleri vardır ki, onlara uyan esas itibariyle tek bir model vardır. Ya da, senin deyiminle herhangi iki model "bir şekilde aynı"dır. Sen bunu mu istiyorsun? Bu da başka bir derinliktir. O zaman bu aksiyom sistemini o modeli tanımlamak için kullanabilirsin! Kutulardan hangi tavşanların çıkacağının o zaman gerçekten bir önemi kalmaz. Hiç tanımadığın bir nesnenin senin için bilinmeye değer olan, fakat bilmediğin hiçbir yönü kalmamış olur. İki tarafı da keskin bu hançere yapısalcılık denir.

Bunun üzerine bende cevaba kudret kalmadı.