Engin Toktaş
matematik_kulesi@yahoo.com

Farklı Bakabilmek

Isaac Newton ve Leibniz ile başlayan, integralin matematik dünyasındaki haklı yükselişi sayesinde insanoğlu, bugünkü göz kamaştırıcı mühendislik başarılarına imza atabildi. Bazı integral hesaplamaları gerçekten çok karmaşık olabiliyor. Ancak bazılarını integralin temelde bir alan hesabı yöntemi olduğunu bilerek kolay bir şekilde çözebilirsiniz. Şimdi bu ipucunu da kullanarak aşağıdaki integrali hesaplayabilir misiniz? Unutmayın integralin püf noktası "farklı bakabilmek"te yatıyor.

$$\int_0^2 \left(\sqrt{1+x^3}+\sqrt[3]{x^2+2x}\right)dx = ?$$

Sayılardan Kule

Dergimizdeki bu sayfanın ismine uygun olarak sayılardan bir kule oluşturduk.

$$x^{x^{x^{8}}} = 2$$

Verilen eşitliğe göre kuledeki x'in değerini bulunuz.

Çarpanlara Ayırma

Bazen bir sorunun hiç aklınıza gelmeyen bir çözüm yolunu görmek, soruyu çözmekten daha zevkli olabilir. Soruma bu şekilde başlamam sakın hevesinizi kırmasın. Neyse ki matematik, gideceğiniz yere her zaman alternatif yollar sunabilecek bir rehberdir. Soruda, aşağıdaki iki eşitliğin tüm reel köklerinin birlikte toplamını bulmanız isteniyor.

$x^3 + 6x^2 + 10x - 15 = 0$

$x^3 + 6x^2 + 10x + 23 = 0$

Kendinize seçtiğiniz rehberin yardımıyla sonucu bulabilir misiniz?

Ne Kadar Arttı?

Elimizde büyükçe bir A sayısı var. Sayımızın güzel özelliğinden yararlanarak onu şu şekilde gösterebiliyoruz:

A = 1.2 + 2.3 + 3.4 + ... + 70.71 + 71.72

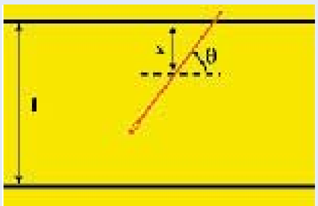
Bu güzel A sayısımızı 71 ile böldüğümüzde kalanın kaç olacağını bulunuz.

Matematiğin Şaşırtan Yüzü

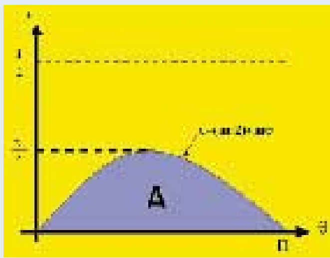
Buffon'un İğneleri

Bu ay sizlere, matematik dünyasının eski ve ünlü bir matematik deneyini aktaracağız. 1777 yılında Fransız Comte De Buffon tarafından bulunan ve "Buffon'un iğneleri" olarak ün kazanan deneyle çok ilginç bir şekilde ∏ sayısını deneysel olarak elde edebiliyorsunuz.

Olasılık teorisinin güzel bir örneği olan bu deneyi evinizde yapmanız mümkün. Bunun için bir A4 kağıt alın ve araları elinizdeki iğnenin tam uzunluğu kadar olacak şekilde paralel çizgiler çekin. Daha sonra, her seferinde elinizin konumunu da değiştirerek kağıt üzerine iğneyi yukarıdan bırakın ve iğnenin çizgiye değip değmediğini not edin. Birçok deneme sonunda iğnenizin çizgiye değme olasılığını bulun. İğnenin çizgiye değme sayısının toplam deneme sayınıza oranı, olasılığı verecektir. İlginç bir şekilde göreceksiniz ki bu değer 2/∏ sayısına çok yakın olacak! Deneme sayınızı ne kadar arttırırsanız, ∏ değerine o kadar çok yaklaşacaksınız.



Problemin ispatını kolaylaştırmak için çizgiler arası uzaklığı 1, daha genel bir ispat olması için de iğnenin boyunu 1'den küçük olma koşuluyla m aldık. Şekilde de görüldüğü gibi iğnenin orta noktasının en yakın çizgiye uzaklığı x'tir. Tüm olasılıklar göz önüne alındığında ≤x≤0.5 ve 0≤θ≤∏ olur. Oysa iğnenin çizgiye değme olasılığını düşündüğümüzde x≤(m/2)sinθ şartı ile karşılaşırız.



Kesik çizgiler ve koordinat ekseninin oluşturduğu dikdörtgen tüm ihtimalleri gösterirken, mavi alan x≤(m/2)sinθ koşulumuzu sağlayan (x,θ) ikililerinin bulunduğu bölgeyi gösterir. Bu durumda iğnenin çizgiye değme olasılığı, mavi bölgenin alanının dikdörtgenin tüm alanına oranıdır. Mavi alanı hesaplarsak:

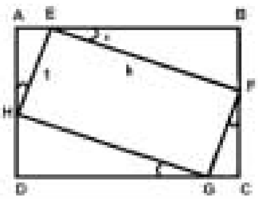
$$\int_0^{\Pi}\left(\frac{m}{2}\sin\theta\right)d\theta = m$$

Sonuçta iğnenin çizgiye değme olasılığını $\frac{m}{\pi/2}$ olarak buluruz. Eğer iğnenin uzunluğu çizgilerin arasındaki uzunluk olarak alınırsa (bizim örneğimizde bu 1'e eşittir) olasılığımız en başta söylediğimiz gibi 2/∏ olur. Gördüğünüz gibi bir iğne ve bir kağıtla tarihte tüm medeniyetleri uğraştıran gizemli ∏ sayısını elde etmiş olduk.

Geçen Ayın Çözümleri

Ne Kadar Esnek? :

Şekilde de gösterildiği gibi dikdörtgenlerin 2 uzun kenarı arasında kalan açıyı x olarak alalım. Bu yüzden x açısı EBF üçgeninin en küçük açısıdır yani x ≤ Π/4'tür . Kolaylık olması için EH = 1, EF = k ve dolayısıyla EFGH dikdörtgeninin esnekliği k olsun.



Bu durumda BF = k sinx, EB = k cosx olur. <GFC'nin de x olması nedeniyle FC = cosx ve CG = AE = sinx 'dir. Tüm bu değerlere göre ABCD'nin esnekliği:

$$\frac{AB}{BC}=\frac{k\cos x+\sin x}{\cos x+k\sin x},$$

Biz bu değeri k ile karşılaştırmak istiyoruz. Eğer k değeri ABCD'nin esnekliğinden büyük veya eşitse içler dışlar çarpımı ile kcosx + sinx ≤ kcosx + k^2sinx olması gerekir. Sadeleştirirsek sinx ≤ k^2sinx olur ve k ≥1 olduğu için eşitsizlik doğrudur. Artık iç rahatlığıyla EFGH'nin esnekliğinin ABCD'den az olamayacağını söyleyebiliriz.

İlginç Bir Bağıntı :

ABC üçgeninin en kısa kenarı z, alanı da S olsun. Öyleyse;

$$S=\frac{1}{2}h_z.z=\frac{1}{2}h_x.x=\frac{1}{2}h_y.y$$

$h_z = h_x + h_y$ olduğuna göre denklemimizi tekrar düzenleyelim.

$$\frac{2S}{z}=\frac{2S}{x}+\frac{2S}{y}$$

Bu da xy – xz – yz = 0 denklemine eşittir. Biraz dikkat edersek bu terimin üç sayının karesini alırken kullanıldığını anımsarız.

$(x + y - z)^2 = x^2 + y^2 + z^2 + 2(xy - xz - yz) = x^2 + y^2 + z^2$

(x + y – z) değeri bir tamsayı olduğuna göre ispatımızı tamamlamış oluruz.

Sayıların Kralı, Kralların Sayısı :

Yüzyıllarca tüm ileri uygarlıkların ilgilendiği bu üç sayı e, Π ve i arasındaki ilişkiyi Abraham de Moivre formülü verir. Şaşırtıcı bir şekilde aradığımız değer eksi birdir!

$e^{i\Pi}$ = -1 Bu formül Euler formülünün x = Π için özel bir halidir. Euler formülüne göre e^{ix} = cosx + i sinx 'tir. Cos Π = -1 ve sin Π = 0 olduğundan $e^{i\Pi}$ = -1 olur.

Sihirli Matematik :

a_1 = x ve a_2 = y olsun. Buna göre;

$$a_3=\frac{y+1}{x},\quad a_4=\frac{\frac{y+1}{x}+1}{y}=\frac{y+x+1}{xy}$$ ve a_5 değeri de

$$a5=\frac{\frac{y+x+1}{xy}+1}{\frac{y+1}{x}}=\frac{y+x+1+xy}{(y+1)y}=\frac{(y+1)(x+1)}{(y+1)y}=\frac{x+1}{y}$$ olur.

Bu durumda a_6 değeri hesaplandığında x'e yani a_1'e eşit olduğu görülür. Aynı şekilde $a_7=a_2$ olduğu da ispatlanabilir. Görüldüğü gibi dizimizin 5li bir periyodu var. Öyleyse $a_{2002} = a_2$ = 1999 olmalıdır.

Daha Az Olamaz! :

f(t) = t^a.b + t^{-b}.a olan ve a>1, b>1, t>1 koşulunu sağlayan bir fonksiyon tanımlayalım. Fonksiyonun türevini aldığımızda f'(t) = ab(t^{a-1} – t^{-b-1}) değerini elde ederiz. a >1 olduğu için t^{a-1} >1 diyebiliriz. Aynı şekilde b>1 için t^{-b-1} <1 'dir. Bu durumda ab'nin de pozitif olması nedeniyle fonksiyonun türevi ab(t^{a-1} – t^{-b-1}) >0 'dır yani artan bir fonksiyondur.

O halde f(2) > f(1) diyebiliriz. Bu değerleri fonksiyonumuzda yerine koyarsak aşağıdaki eşitsizliği elde ederiz: b.2^a + a.2^{-b} > a + b

İspatımızı bitirmemiz için artık sadece bir engel kaldı, o da b yerine x, a yerine de y'yi koymak!

Geçen ay yayınladığımız "Pick Teoremi" yazısıyla ilgili Hakan Nizamoğlu'nun uyarısıyla bir açıklama yapma gereği duyduk. Yazıda bir birim kare olarak 2x2 cm'lik kare alınmıştır. En küçük karenin kenarı, 1 birim olarak alınmazsa alan formülümüzü A= (I + S/2 – 1) . L^2 şeklinde (L= birim karenin kenar uzunluğu) düzenlememiz gerekiyor. Okuyucumuzun ilgisi için teşekkür ederiz.