## Matematik Eğlenceleri...

# Geometrik Körük

HER amatör marangoz bilir ki dikdörtgen biçimli bir kitaplık eğilebilir- bir köşesine basılırsa paralelkenar biçimini alır. Oysa bir üçgen eğilemez; bir kenarının uzunluğunu değiştirmeden bir üçgenin biçimini değiştirmek olanaksızdır. Aslında üçgen, eğilmez olan tek çokkenarlıdır. Üçgenden başka bir çokkenarlı-dikdörtgen, beşgen, altıgen vb. - biçiminde yapılan bir kitaplık mutlaka payandalarla desteklenmelidir. Çapraz payandaların rolü, çokgeni biçimi sabit üçgenlere ayırmaktır.

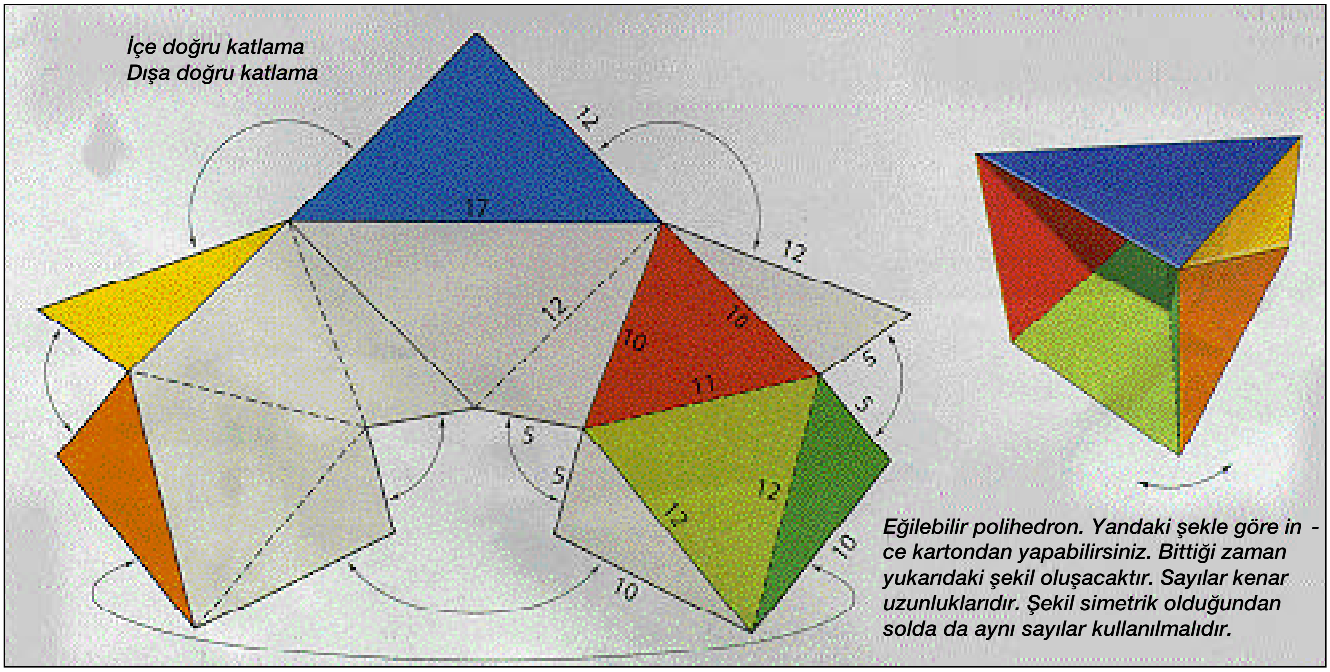
Bir kitaplığı sağlamlaştırmanın bir diğer yolu arkasına düz bir tahta çakmaktır. Bu durumda problem üç boyutlu bir hal alır; bu çok daha ilginçtir. 200 yıldan beri matematikçiler çokyüzlülerin (doğru kenarlar boyunca kesişen sonlu sayıda çokgen yüzleri olan katılar) eğilmezliğine şaşırıp kalmışlardır. Son zamanlara değin, yüzleri üçgen olan her çokyüzlünün eğilmez olduğu varsayıldı. Bugün bunun doğru olmadığı anlaşılmıştır. Üçgen yüzlerinin hiçbiri biçim değiştirmeyen eğilebilir (fleksibl) çokyüzlüler vardır. Geçen yıl üç matematikçi uzun zamandır kanıtlanamamış olan körük konjektürünü (konjektür= kanıtlanmamış, fakat doğru olduğu sanılan teorem; sanıt) kanıtladılar; bu konjektüre göre eğilebilir bir çokyüzlünün biçimi değişse bile hacmi sabit kalır. Eski bir Grek formülüne dayanan bu kanıt matematikte bir çığır açtı.

Kâğıt bükme sanatı (origami) ile uğraşan herkes bilir ki, birçok eğilebilir çokyüzlü yapmak olasıdır; kanat çırpan kuşlar bacaklarını oynatan kurbağalar vb. Acaba bu şekiller eğilebilir çokyüzlüler midir? Yanıt hayır'dır. Bu şekillerde kanat ya da bacakları oynarken kâğıt hafifçe bükülür. Akordiyonda da durum aynıdır; körük açılıp kapanırken yüzler gerilir ve bükülürler. Eğilebilir çokyüzlülerin yüzleriyse milyarda bir metre kadar bile kıpırdamaz. Eğilebilir çokyüzlü biçim değiştirirken yalnızca yüzler arasındaki açılar değişir. Sanki yüzler, kenarlardan menteşelidir ve bunların dışında hiçbir şey yerinden oynamaz.

1813'te Fransız matematikçisi Augustin Louis Cauchy, konveks (dışbükey) bir çokyüzlünün bükülemeyeceğini kanıtladı. Peki ya girintiler varsa?

Fransız mühendis Raoul Bricard şunu kanıtladı: Konveks olmayan bir çokyüzlü, yüzleri birbiri içinden geçiryorsa eğilebilir niteliklidir. Böyle bir cisim gerçek dünyada varolamaz. Fakat Bricard şekillerini, yüzleri çıkarılmış ve kenarları bükülmez çubuklardan yapılmış çokyüzlüler olarak hayal edebiliriz.

1970'lerde şimdi Cornell Üniversitesi matematik bölümü başkanı olan Robert Conelly, Bricard'ın konveks olmayan eğilebilir çokyüzlülerini, yüzleri birbiri içinden geçmeyecek biçimde değiştirdi. Bu şekil Düsseldorf Üniversitesi'nden Klaus Steffen tarafından basitleştirildi: 14 üçgen yüzlü ve 9 köşeli eğilebilir bir çokyüzlü. Bu çokyüzlüyü ince kartondan yapa-




*Eğilebilir polihedron. Yandaki şekle göre ince kartondan yapabilirsiniz. Bittiği zaman yukarıdaki şekil oluşacaktır. Sayılar kenar uzunluklarıdır. Şekil simetrik olduğundan solda da aynı sayılar kullanılmalıdır.*

rak ve nasıl büküldüğünü görerek eğlenebilirsiniz. Bu olası eğilebilir çokyüzlülerin en basitidir; fakat bunu kanıtlamak çok zordur.

Bu şekil bükülürken, bazı yüzler birbirlerine yakınlaşırken, öteki yüzler birbirlerinden uzaklaşıyordu. Çokyüzlünün hacmi sabit görünüyordu. New York Kent Üniversitesi'nden D. Sullivan bu varsayımı kanıtlamak için küçük bir delik açarak eğilebilir çokyüzlünün içine duman doldurdu. Şekil bükülünce delikten hiç duman çıkmadı. Bu deney hacmin değişmediğini düşündürüyordu; fakat bildiğimiz körük doğal olarak geometrik körükten farklıdır; çünkü körüğün hacmi biçimine bağlı olarak değişir; bu sayede havayı içine alıp dışarı verir; geometrik körüğün hacmiyse, biçimine bağlı olarak değişmez.

Körük konjektürünün ilginç bir yönü şudur: Onun iki boyutlu analogu yanlıştır. Eğilebilir çokkenarlıların alanı, biçimine bağlı olarak değiştir. Örneğin bir dikdörtgen bükülerek paralelkenar yapılınca alanı küçülür. Açıkça, üçboyutlu uzayda, çokyüzlü gerçek hacmi biçimiyle değişen körük yapmayı olanaksızlaştıran bir şey vardır.

Bu problemi çözmek için Connely ve diğer iki matematikçi Moskova Devlet Üniversitesi'nden Idzhad Sabitov ve Cornell Üniversitesi'nden Anke Waltz, üçgenin alanını veren eski bir formül üzerinde durdular. Bu formülü Arşimed'in bulduğuna inananlar varsa da, aslında onu bulan ve kanıtlayan İskenderiyeli Heron'dur. Heron M.Ö. 100 ile M.S. 100 arasında bir tarihte yaşamış bir Yunan matematikçisidir. Heron formülünde, kenarları a, b ve c olan bir ABC üçgeninde, çevrenin yarısı s ise alan

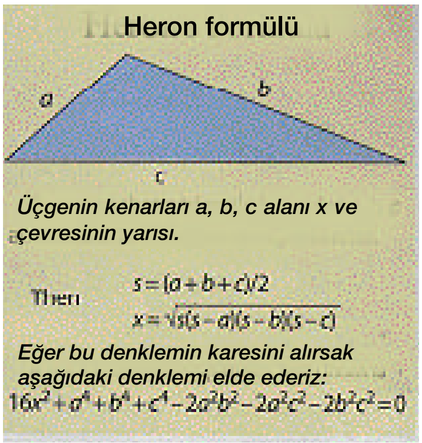
$x=\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$dir.

Bunun karesi

$16x^2+a^4+b^4+c^4-2a^2b^2-2a^2c^2-2b^2c^2=0$

olur. Bu çokterimli bir denklemdir (polinom) ve x, a, b ve c'nin tamsayı üsleri sözkonusudur.

Sabitov matematiğe yeni bir düşünce getirdi: Her çokyüzlü için, şeklin hacmini kenar uzunluğuna bağlayan benzer bir çokterimli denklem olabilirdi. Böyle bir




denklemin bulunuşu, çok çarpıcı bir olay olacaktı. Bazı çokyüzlülerin hacmi için güzel formüller vardır; örneğin dikdörtgen prizmasının hacmi uzunluk, en ve yüksekliğin çarpımına eşittir; dört adet üçgen yüzü olan dörtyüzlü (tetrahedron) için Heron formülüne benzeyen bir formül vardır. Fakat bugüne kadar hiç kimse herhangi bir çokyüzlünün hacmini verebilecek genel bir formül bulamadı. Acaba geçmişin büyük matematikçileri gerçekten böyle bir formül aramadılar mı? Bu pek olası gibi gözükmüyor.

Diyelim ki böyle bir formül var. O zaman körük konjektürünün doğru olması gerekir; çünkü bir çokyüzlünün hacmi yalnız kenarlarının uzunluğuna bağlı olacaktır. Oysa biliyoruz ki bizim geometrik körüğümüz, kenarlarının uzunluğu değişmeden, yalnız yüzler arasındaki açı değişerek biçim değiştirir; kenarlarının uzunluğu değişmediğinden hacminin de değişmemesi gerekir. Bu tip usavurmada bir pürüz vardır: Çokterimli bir denklemin bir değil, birçok çözümü vardır; bu bakımdan kuramsal olarak çokyüzlünün hacmi bir çözümden diğer çözüme sıçrar. Ne var ki gerçekler dünyasında bu gibi sıçramalar olamaz; geometrik körüğümüz yavaş yavaş (sürekli) biçim değiştireceğinden, hacmi bir değerden diğer bir değere atlayamaz. O halde hacim sabit kalmalıdır.

Matematikçiler kanıtlarına, Heron formülüne benzeyen, fakat ondan daha karmaşık olan dörtyüzlünün hacim formülünü değiştirerek başladılar. Herhangi bir çokgen üçgenlere ayrılabildiği gibi herhangi bir çokyüzlü de dörtyüzlülere ayrılabilir. Çokyüzlünün hacmi, kendisini oluşturan dörtyüzlülerin hacminin toplamına eşittir. Fakat yalnız başına bu yöntem, bu problemi çözmek için yeterli değildir; çünkü ancak bütün dörtyüzlülerin kenarlarını içeren bir formül oluşturabilir; oysa dörtyüzlülerin kenarlarının birçoğu, çokyüzlünün kenarı değildir. Dörtyüzlülerin kenarları, çokyüzlünün bir köşesinden ötekine giden köşegenlerdir; çokyüzlü biçim değiştirdiği zaman bu köşegenlerin uzunlukları da değişir. Matematikçiler değişken elemanlardan kurtulabilmek için bu formüle cebirsel bir "masaj" yapmak zorunda kaldılar.

Bu karmakarışık bir işti. Örneğin bir sekizyüzlü (oktahedron) söz konusu olduğunda, hacmi verecek formüle cebirsel masaj uygulanması sonucu, 16. dereceden ($x^{16}$ içeren) çokterimli bir denklem elde edildi. Yüz sayısı daha fazla olan çokyüzlüler söz konusu olduğunda, daha da yüksek üsler içeren çok terimli denklemler elde ediliyordu. Fakat nihayet 1996 yılında Rus matematikçisi Sabitov, herhangi bir çokyüzlünün hacmini verebilen bir algoritma buldu! 1997 yılında Cornell Üniversitesi'nden Robert Connely ve Anke Waltz ve Moskova Devlet Üniversitesi'nden İdzhad Sabitov, bu algoritmayı çok basitleştirdiler. Bütün çokyüzlüler için böyle denklemler bulunmasının nedenleri tam anlaşılamamıştır. İki boyutlu bir ortamda, yalnız üçgenlere uygulanabilen Heron formülünden başka formül yoktur [Üçgenin alanı= çevrenin yarısıyla, çevrenin yarısının üç kenardan farklarının çarpımının karekökü]. Connelly ve Waltz, körük konjektürünü dört boyutlu bir ortam için kanıtlayabilmişlerdir; fakat beş ve daha fazla boyutlu ortamlarda problem kanıtsız kalmaktadır. Bir kartonu biraz bükmekle yapılan basit bir deneyin, nasıl hiç beklenmedik harika bir matematiksel buluşa yol açtığını görmek insanı adeta büyülemektedir.

Scientific American, Temmuz 1998
Çeviri: Selçuk Alsan