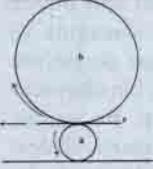


Zeka Oyunları

İki Tekerlek Problemi



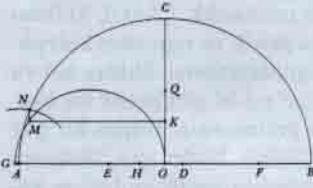
Hiçbiri diğerinin önüne geçmezdi. İki teker arasında bir kağıt (S) koyup tekerleri yuvarlatırken kağıdın sola doğru hareket ettiğini düşünelim. S, X cm hareket ederse alttaki tekerin merkezi a, aynı yönde X/2 cm gider. Aynı şey üstteki tekerin merkezi b için de doğrudur. Demek ki, büyük ve küçük teker yuvarlatırken katlıklıklı diğer durumları koruruz.

Kamp Çorbası

24 1/4 cm. Daire, çorba kabının dibi, I üç çerçevlin kesime noktası ve A, B, C çorba kabının çevrelere değme noktaları olmuştur. IB = 6, IA = 8 ve IC = 15. AD çorba kabının çapı, AB =  $\sqrt{6^2 + 8^2} = 10$  ve AC =  $\sqrt{8^2 + 15^2} = 17$ . ABD üçgeni AD çapını gördüğü için dik üçgen. Her ikisi de AB yayını gören çevre açıları olduğundan a = 90°, AIC üçgeni de dik üçgen (çevrelerin dikliğinden). O halde ABD ve AIC üçgenleri benzer. AD/AB = AC/AI ve AD = 10 x 17/8 = 21 1/4.



Pergel ve Çevrelere Önyediğin Çözüm



Önce bir yarıym dairenin OC yarıçapının ortası olan Q merkezini ve sonra OC'ye dik AB çapı üzerinde, O merkezinden OD = 1/8 yarıçap uzaklıktaki D noktasını buldu. DQ = DE = DF olacak şekilde E ve F'yi buldu. EQ = EG ve FQ = FH olarak G ve H noktalarını belirleyince. OK =  $\sqrt{OH \times OQ}$  olacak şekilde K noktasını buldu (bunun için aynı bir kağıda OH + OQ doğru parçasının çap alan yarıym daireyi çizim ve O noktasından bir dik çizim; bu dikin yarıym daireyi kestiği nokta ile O arasındaki uzaklık OK'ya eşittir). K'dan AB'ye bir paralel çiz-

zin, bu paralelin OG çaplı yarıym daireyi kestiği nokta M olsun. M noktasından OC'ye çizilen paralel, AB çaplı yarıym daireyi N'de kessin. AN yayı, daire çevresinin 1/17'sidir. Bunu 1819'da John Lowry buldu; kann aynı yıl yayımlanan Mathematical Repository'de 9 sayfa almıştı. Bir daire içine pergel ve çevrelere poligon çizenin kullandığı Fermat sayıları ( $2^{2^n}$ ) dayanarak Gauss buldu. Bunu ayrıca soracağız.

**Maymun Hindistan Cevizleri ve Hırsızlar**  
Hindistan cevizi sayısı X olsun. Basitleştirmek için  $(n-1)/n = A$  dersek  $A-1 = -1/n$  ve  $1/(A-1) = -n$  olur. Birinci adım A  $(X-1)$  cevizi bırakır. İkinci adım A  $[A(X-1)-1] = A^2(X-1) - A$  cevizi bırakır. Üçüncü adım A  $[A^2(X-1) - A - 1] = A^3(X-1) - A^2 - A$  cevizi bırakır v.b. n. adımın bıraktığı cevizi sayısı  $(k^n - n)$ 'nin katıdır:  $A^n(X-1) - A^{n-1} - A^{n-2} - \dots - A - A^n(X-1) - (A^{n-1}A) / A - 1 = A^n[X-1 - (A-1)] + A / (A-1)$ . A'nın değerini yerine koyarsak:  $(n-1)n!n^{n-1}(X-1) + n - (n-1) \equiv 0 \pmod{n}$  (modülüs için bk. Bifim ve Teknik, Sayı 316, Zeka Oyunları Yanıtları).  $(X-1)n! / n! \equiv (-1)^{n-1} \pmod{n}$ . Sonra  $(X-1)n! / n! \equiv kn \pm 1$  (n tek sayı ise işaret artı, n çift sayı ise işaret eksi). Nihayet  $X = n^k$   $(kn \pm 1) - n! = n^k [kn - (k-1)n! - (n-1)!]$ . k, X'i negatif yapmıyacak herhangi bir tamsayı olabilir. X'in minimum değeri için, n'ün tek veya çift oluşuna göre  $k = 0$  veya  $k = 1$ 'dir; böylece  $n^0 - (n-1)$  ve  $(n-1) - (n-1)$  formülleri elde edilir.  $n = 5$  ise  $X = 5^5 - 4 = 3121$ .  $n = 4$  ise  $X = (4^4 - 1) / (4-1) = 765$ . n adam ve x maymun varsa, n adam şu kadar cevizi bırakır:  $A^n(x-r) - r(A^{n-1} + \dots + A + A^n)(x-r) - [n(A^n-1)] / (A-1) = A^n(x-r) - r(A-1) + Ar / (A-1)$ . Burada:  $(n-1)! \{(x-r)n! / n! - r(n-1) \equiv 0 \pmod{n}\}$ .  $\{(x-r)n! / n! - (-1)^{n-1}\} r \pmod{n}$ .  $(x-r)n! / n! \equiv kr + ve x = n^k [kn - (k-1)n! - (n-1)!]$ . Minimum için çözümde n tek ise  $k = 0$  ve n çift ise  $k = 1$ 'dir.  $x = n^k - r(n-1)$  ve  $n^0 - r(n-1) - (n-1)$ . Örneğin  $n=5$  maymun ve  $n=5$  adam varsa  $x = 5^5 - 5 - 5(4-1) = 9363$ ,  $r = 3$  ve  $n = 6$  ise  $x = 6^6 - 3 - 6(5-1) = 139953$ .

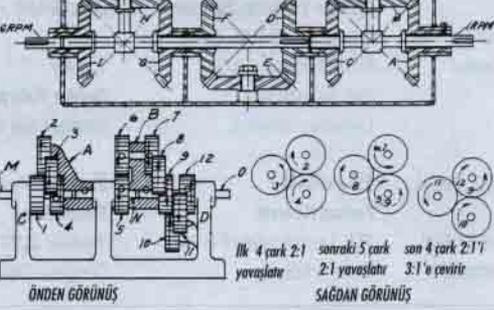
**Eksantrik Milyoner**  
1 000 000'u 7'ye bölünene göre yazalım. Sol sütunda bölünen, en solda bölün (daima 7) ve en sağ sütunda bölme işleminden artan yazılmıştır. Biraz açıklayalım: 1 000 000 / 7 = 142857, artan 1. sonra 142857 x 7 = 20408, artan 1. daha sonra 20408 / 7 = 2915, artan 3. Böylece 1 000 000 = 7<sup>7</sup> + 7<sup>6</sup> + 3\*7<sup>5</sup> + 3\*7<sup>4</sup> + 3\*7<sup>3</sup> + 3\*7<sup>2</sup> + 7\*1. (Bir sayı n'ün üçeğine - scale of 7 - yazılmış olduğunu.)

|   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 7 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |   |   |   |
|   | 7 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |   |   |   |
|   |   | 7 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |   |   |   |
|   |   |   | 7 | 0 | 0 | 0 | 0 |   |   |   |
|   |   |   |   | 7 | 0 | 0 | 0 |   |   |   |
|   |   |   |   |   | 7 | 0 | 0 |   |   |   |
|   |   |   |   |   |   | 7 | 0 |   |   |   |
|   |   |   |   |   |   |   | 7 |   |   |   |
|   |   |   |   |   |   |   |   | 7 |   |   |
|   |   |   |   |   |   |   |   |   | 7 |   |
|   |   |   |   |   |   |   |   |   |   | 7 |

şafına, B'nin dönen kolu O şafına kamalıdır. M şafının dönüşü 4 çarkı çevirir; 1, 2, 3, ve 4 çarklar birbirine bağlanışından hepsi beraber döner. 1 sabit olduğundan 2. 1'in etrafında dönerek A kolunu da kendisiyle beraber döndürür. M'nin her iki dönüşü için A bir kere döner ve bu dönüşü N şafı ile 5 çarkı aktarıyor. 6, 7, 8, ve 9 çarklar da benzer şekilde çalışır. 9 çark sabit olsaydı bunlar 2:1 bir yayılamla sağlayacaktı. Fakat 9, 10, 11, ve 12 çark serivinde 9 çark sabit değil, 12 çarkın ve dolayısıyla B kolunun tersi yönde döner. Bu nedenle 5 çark, 9 çarkın bu tersine dönüşünü kompanse etmek için B kolunun her dönüşünde fazladan bir dönüş yapar. Böylece 5. ve 12 çarklar arasında 2:1 yerine 3:1 yayılamı olur ve 1 çarkta 12 çark kadar hareket 6:1 oran yayılamı olur (Makine mühendislerine de danışınız).

Tropik Orman ve Dişli Çark

Üst resim: 9 çarklı çözüm. Çözümü en yavaş (en sağdaki) çarktan itibaren vereceğiz. A çarkı hareketlessin, B çarkının mili yavaş hız şafına bağlı olduğundan, B çarkı kendi eksenini etrafında dakikada 1 hızla döner. Eğer yavaş hız şafı, saat yönünde dönyorsa, C çarkı saat yönünde dakikada iki kere döner. D çarkı C'ye bağlı olup onunla aynı hızda döner. E çarkı sabit bir eksen etrafında döner ve F çarkını saatın tersi yönde dakikada iki kere döndürür. G, F'ye bağlı olduğundan saatın tersi yönde F'nin hızıyla döner. H çarkının mili C ve D çarklarına bağlanışından, H eksenini etrafında dakikada iki kere döner. Eğer G sabit olsaydı, 1 çarkı saat yönünde dakikada dört kere dönerdi; fakat G çarkı saatın tersi yönde dakikada iki kere döndüğünden, 1 çarkın dakikada saat yönünde iki dönüş ekleyerek dört dönüş hızında dakikada 6'ya çıkarır.



İlk 4 çark 2:1 yayımlar, sonraki 5 çark 2:1 yayımlar, son 4 çark 2:1 yayımlar 3:1'e çevirir.

Ş. üç dostu  $7^3-1=029$ Ş. üç dostu  $7^2=147$ Ş. bir dostu  $7=7$ Ş. bir dostu  $1=1$ Ş. Toplam 16 kişiye 1 000 000 \$ dağılımıdır.

Daire İçine Poligon Çözüm

Gauss bir dairenin içine çevrel ve pergel bir poligon çizilebilmesi için, poligon'un kenar sayısının şu sayılardan biri olması gerektiğini kanıtladı:

- 1)  $2^{2^n} + 1$  şeklinde bir asal sayı (Bu sayılara Fermat sayısı denmektedir);
- 2) Hepsini birbirinden farklı bu gibi asal sayılardan çarpımı;
- 3) 2'nin herhangi bir üssüyle  $2^{2^n}$  şeklinde bir asal sayının çarpımı. Fermat sayı yalnızca  $n = 0, 1, 2, 3$  ve 4 için asaldır; bu değerlere karşılık olan asal sayılar 3, 5, 17, 257 ve 65537'dir. Bu beş sayıdan yapılabilecek birli, ikili, üçlü, dördü ve beşli kombinasyonları sayısı  $2^5 - 1 = 31$ 'dir.

Sıra (n) Poligonun kenar sayısı (hepsi tek)

|    |                               |
|----|-------------------------------|
| 1  | 3 = 3                         |
| 2  | 5 = 5                         |
| 3  | 15 = 3.5                      |
| 4  | 17 = 17                       |
| 5  | 51 = 3.17                     |
| 6  | 85 = 5.17                     |
| 7  | 255 = 3.5.17                  |
| 8  | 257 = 257                     |
| 9  | 771 = 3.257                   |
| 10 | 1285 = 5.257                  |
| 11 | 3855 = 3.5.257                |
| 12 | 4369 = 17.257                 |
| 13 | 13107 = 3.17.257              |
| 14 | 21845 = 5.17.257              |
| 15 | 65535 = 3.5.17.257            |
| 16 | 65537 = 65537                 |
| 17 | 196611 = 3.65537              |
| 18 | 327685 = 5.65537              |
| 19 | 983055 = 3.5.65537            |
| 20 | 1114129 = 17.65537            |
| 21 | 3342387 = 3.17.65537          |
| 22 | 5570645 = 5.17.65537          |
| 23 | 16711935 = 3.5.17.65537       |
| 24 | 16843009 = 257.65537          |
| 25 | 50529027 = 3.257.65537        |
| 26 | 84215045 = 5.257.65537        |
| 27 | 252645135 = 3.5.257.65537     |
| 28 | 286331153 = 17.257.65537      |
| 29 | 858995459 = 3.17.257.65537    |
| 30 | 1431655765 = 5.17.257.65537   |
| 31 | 4294967295 = 3.5.17.257.65537 |

Bu 31 sayı 2'nin herhangi bir üssüyle çarpılarak kenar sayısı çift olan ve çevrel ve pergel çizilebilen poligon elde edilebilir. 100'e kadar tek veya çift kenarlı böyle 24 poligon, 100'e kadar 52 ve 1.000.000'a kadar 206 poligon vardır. 100'e kadar çevrel ve pergel çizilebilen poligonların kenar sayısı şöyledir: 3, 4, 5, 6, 8, 10, 12, 15, 17, 20, 24, 30, 32, 34, 40, 48, 51, 60, 64, 68, 80, 85, 96, geriye bu poligonlar çevrel ve pergel çizilebilir değil, sıkın bunun kolay birşey olduğunu sanmayın. Prof. Hermes of Lingon 65537 kenarlı bir poligon çizilebilecek için ömrünün on yılını harcamış! Gauss, asal Fermat sayılarıyla daire içine çevrel, pergel çizilebilir poligonlar arasında ilişkiyi bulmaktan o kadar gurur duyuyordu ki mezarıya üstüne bir heptadecagon (onyediğen) çizilmesini vasiyet etti. Bu nedenle yerine getirilemedi, fakat Gauss'un doğum yeri olan Braunschweig, Almanya'daki anıtının üstüne böyle bir onyedigen çizildi.

Kutulardaki Toplar

1-a) Bu problem modern istatistiksel fizikte önemli rol oynamaktadır (Boltzmann istatistikleri). Orada topları yerleri partiküller almaktadır. Biz toplarımıza dönelim. Boltzmann hesaplarında bir kutuda sıfırdan n'e kadar herhangi bir sayıda top bulunabilir; ayrıca değişik değişik toplar varsa, bunlar da kutulara her rengin şansı eşit olarak dağılır. Her top N kutudan herhangi birinde olabilir; demek ki n top, N kutuda N<sup>n</sup> farklı şekilde dağılır. Seçilen n kutu içinde toplar n' farklı şekilde dizilmiş olabilir. O halde N kutu arasından seçilen n kutudan herbirinden en az bir top bulunma olasılığı P<sub>1</sub> = n/N<sup>n</sup>'dir.

1-b) N kutu arasında tasgele n kutudan herbirinin

|            |   |   |   |   |   |   |   |   |   |    |    |    |    |    |    |    |
|------------|---|---|---|---|---|---|---|---|---|----|----|----|----|----|----|----|
| sayısı     | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 |
| kuşluk (f) |   |   |   |   |   |   |   |   |   |    |    |    |    |    |    |    |

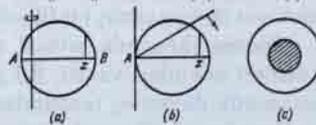
içinde en az bir top bulunma olasılığı  $C_n^N$  kat daha büyüktür. Aranan olasılık:

$$P_2 = \frac{C_n^N \cdot n!}{N^n} = \frac{N!}{N^n \cdot (N-n)!} \cdot n! = \frac{N!}{N^n} \cdot \frac{n!}{(N-n)!} = \frac{N!}{N^n} \cdot \frac{n!}{(N-n)!}$$

bulunur.  
2) Şekilde Boltzmann ve Bose-Einstein olasılıklarının farkını örneklerle görelim.  $N = 4$  ve  $n = 2$ 'dir; yani 4 kutumuz ve 2 topumuz var; topları bir beyaz (b), bir de al (a). Görülüyor ki, 2 top + kutuya  $4^2 = 16$  şekilde dağılılabiliyor. Boltzmann için bu 16 durumun herbiri aynı derecede olasıdır. Bose-Einstein'a göre, 5-11, 6-12, 7-13 ve 8-14 durumları özdeğer; dolayısıyla aynı derecede olası 16 değil, 10 olay vardır. Boltzmann'da toplam olası durumlar  $N^n = 4^2 = 16$  iken Bose-Einstein'da  $(n+N-1)! / (n!(N-1)!) = 10$ 'dur. Bose-Einstein'da  $P_1 = n! / (N-1)! \cdot (n+N-1)! / (n!(N-1)!) = 10/16$  ve  $P_2 = N! / (N-1)! \cdot (N-n)! / (N+n-1)! = 3/5$ 'dir. Nihayet son olarak Fermi-Dirac olasılıklarında her kutuda ya 1 veya 0 top vardır ve topların rengi önemizdir. 1. top N farklı şekilde, 2. top (N-1), 3. top (N-2) farklı şekilde... ve n. top (N-n+1) farklı şekilde konabilir. O halde n top N kutuya N!/n! (N-n)! = 6 farklı yerleştirilebilir. Fermi-Dirac'da  $P_1 = \frac{N!}{n! \cdot (N-n)!}$  ve  $P_2 = 1$ 'dir

Bertrand Paradoksu

1. Çözüm (a): Soldaki kişiye dik bir çap çizelim. Çap uzunluğu örneğin 4 cm olsun. Açıkça bellidir ki, çap 1



ile 3 cm arasında kesen kısımlar atanan şartı sahiptir.  $P = (3-1)/4 = 1/2$ .

2. Çözüm (b): Kirişin ucu A'da sabitletilirsin ve A'daki teğet çizilim. Eşkenar üçgenin bir köşesi A'da ise A'da herbiri 60°'lik üç köşü açı oluşur. Yalnız orta uçdaki kısımlar atanan şartı sahiptir,  $p = 1/3$ .

3. Çözüm (c): Bir kırışın pozisyonu onun orta noktasıyla belirlebiliriz. Eğer kırışın ortası, verilen dairenin içine bulunur ve yarıçapının ortasının yarısı olan çemberin bir daire içine düşüyorsa, bu dairenin alanı büyük daire alanının 1/4'ü olduğundan aranan olasılık  $p = 1/4$ 'dir. Bu paradoksun nedeni problemin tasgele bir kırışın nasıl çizileceğinin tanımlanmasıdır.

Şartlı Olasılık

Şartlı olasılığı p(A/B) ile gösterelim. Anlamı: B olay meydana geldikten sonra A olayının olasılığı. Bir desteden 36 kart çekmek, 36x35 farklı durum yaratır. 1. kartın as olma olasılığı = 4/36; ikinci kartın as olma olasılığı 3/35; 1. kartın as olma olasılığı = 3/36 ve 2. kartın as olma olasılığı = 4/35.

$$a) p(A) = \frac{4}{36.35} + \frac{32.4}{36.35} = 1/9$$

$$b) p(A/B) = 3/35$$

Detektiflik ve Olasılık

Totall olasılık formülünü yazalım:  $p(B) = p(A1) \cdot p(B/A1) + p(A2) \cdot p(B/A2) + p(A3) \cdot p(B/A3) - p(A1) = 2/5$  (muavi evre olasılığı),  $p(A2) = 1/5$  (beyaz evre olasılığı),  $p(A3) = 2/5$  (sarı evre olasılığı),  $p(B/A1) = 2/3$  (muavi evrede gangster olasılığı),  $p(B/A2) = 0$  (beyaz evrede gangster olasılığı),  $p(B/A3) = 3/4$  (sarı evrede gangster olasılığı). Tutulan kişilerin gangster olma olasılığı  $p(B)$ .  $p(B) = 2/5 \cdot 2/3 + 1/5 \cdot 0 + 2/5 \cdot 3/4 = 17/50$  (Yukarıdaki formülede  $p(A1) = A1$  olayının olasılığı  $p(B/A1) = A1$  olayı meydana geldikten sonra B olayının olasılığı v.b).

As Çekme

$$a) p = \frac{C_1^{25} \cdot C_1^{25}}{C_2^{50}} = 0.27$$

$$b) p(A) = \frac{C_1^{25} \cdot C_1^{25}}{C_2^{50}} = 0.2778$$

$$p(A) = \frac{C_1^{25} \cdot C_1^{25}}{C_2^{50}} = 0.0269$$

$$p(A) = \frac{C_1^{25} \cdot C_1^{25}}{C_2^{50}} = 0.0006$$

$$p(A) = p(A1) + p(A2) + p(A3) = 0.3053$$

Faktöryel Hesaplama

$n! = \sqrt{2 \pi \cdot n} \cdot n^n \cdot e^{-n}$  (Stirling formülü)  
Örneğin:  $36! = \sqrt{2 \pi \cdot 36} \cdot 36^{36} \cdot e^{-36}$

Bölüşüm Miras

Avukat kendi atını getirecek at sayısını onyediden onsekize çıkarır. Kardeşler sırayla 9, 6 ve 2 at aldılar (Onsekizin yarısı, üçte biri ve dokuzda biri.  $9 + 6 + 2 = 17$  olduğundan avukat atını geri alır. İjiri püf noktası şuydu:  $1/2 + 1/3 + 1/9 = 17/18$  yazar, bu nedenle



# Matematik

D Ü N Y A S I

## MATEMATİKÇİLERİN VE MATEMATİĞİ SEVENLERİN TEH DERGİSİ!

BİR TANE RASTGELE ÇİZGİ VAR  
**ALİ NESİN**

ULUSAL MATEMATİK OLİMPİYADI  
**ALBERT ERKİP**

DİNAMİK SİSTEMLER, GARİP ÇEKERLER  
VE KAOS

**H.TURGAY KAPTANOĞLU**

L'HÔPITAL KURALI ÜSTÜNE  
**MEFHARET KOCATEPE**

GEOMETRİ PROBLEMLERİNİN ÇÖZÜM  
YÖNTEMLERİ

**ALPARSLAN ERTUĞ**

DAİREYİ KARE HALİNE GETİRMEK;  $\pi$  İLE  $\phi$   
ARASINDAKİ BAĞLANTI GEÇMİŞLE BUGÜN  
ARASINDA BİR KÖPRÜ KURABİLİR Mİ?

**MEHMET SUAT BERGİL**

ÜNLÜ KADIN MATEMATİKÇİLER:  
EMMY NOETHER (1882-1935) (1)

**HÜLYA ŞENKON**

PROBLEMLER

ÇÖZÜMLER

**SATIŞ FİYATI : 25.000 TL 1994 ABONE BEDELİ : 75.000 TL**  
**YALNIZ CİLT KAPAĞI : 50.000 TL 1991-1992 (10 DERGİ) CİLTLİ: 250.000 TL**

**ABONE VE İSTEME ADRESİ : ATATÜRK BULVARI 95/1105 06650 KIZILAY / ANKARA PK: 424 KIZILAY**  
**TEL: 0 (312) 4187945 POSTA ÇEKİ HESABI: 522253 ANKARA**