Tam Sayıların Kuvvet Dizilerini Oluşturan Yöntem

Moessner Mucizesi

Dr. Elif Ebren Kaya [*TÜBİTAK Bilim Genç*

Matematikte zaman zaman beklenmedik bir şekilde ortaya çıkan güzel diziler vardır. Bunlardan biri de 1951 yılında Alfred Moessner tarafından keşfedilen, pozitif tam sayıların kuvvetlerinin üretilmesi yöntemidir. Bu yöntem matematikte ‘’Moessner mucizesi’’ olarak bilinir.

Ardışık pozitif tek sayıların toplamının bir tam kare sayıya eşit olduğunu hepimiz biliriz. Örneğin $1+3=4(=2^2)$, $1+3+5=9(=3^2)$, $1+3+5+7=16(=4^2)$… Alfred Moesner’in keşfettiği yöntem ise bu formülün biraz daha gelişmiş hâlidir. Moessner teoremi olarak bilinen bu yöntemde, sayılar teorisi kullanılarak pozitif tam sayıların n. kuvvetler dizisi yani $\{1^n, 2^n, 3^n, \dots\}$ şeklindeki sayılar oluşturulabilir. Nasıl mı?

Gelin şimdi hep birlikte pozitif tam sayıların 3. kuvvetlerini yani küplerini elde etmeye çalışalım. Bunun için öncelikle pozitif tam sayıları sıralayalım ve pozitif tam sayıların küplerini elde etmek istediğimiz için dizinin her üçüncü terimini diziden çıkaralım. Ardından kalan sayıların kısmi toplamlarını hesaplayalım. Kısmi toplam yaparken her sayıyı solundaki sayılarla toplayalım.

1	2	~~3~~	4	5	~~6~~	7	8	~~9~~	10	11	~~12~~	13	14	~~15~~	16	17	~~18~~	19	20	~~21~~	22	23	~~24~~	25	26	~~27~~	28 …
1	3		7	12		19	27		37	48		61	75		91	108		127	147		169	192		217	243		271 …

Şimdi de yukarıda elde ettiğimiz son dizinin her ikinci terimini diziden çıkaralım ve yine dizinin kısmi toplamlarını hesaplayalım. Bu durumda aşağıdaki görseldeki sayıları elde ederiz.

1	2	~~3~~	4	5	~~6~~	7	8	~~9~~	10	11	~~12~~	13	14	~~15~~	16	17	~~18~~	19	20	~~21~~	22	23	~~24~~	25	26	~~27~~	28 …
1	~~3~~		7	~~12~~		19	~~27~~		37	~~48~~		61	~~75~~		91	~~108~~		127	~~147~~		169	~~192~~		217	~~243~~		271 …
1			8			27			64			125			216			343			512			729			1000 …

Son satırdaki sayıların, pozitif tam sayıların küpleri şeklinde sıralandığını görebiliriz.

1	2	~~3~~	4	5	~~6~~	7	8	~~9~~	10	11	~~12~~	13	14	~~15~~	16	17	~~18~~	19	20	~~21~~	22	23	~~24~~	25	26	~~27~~	28 …
1	~~3~~		7	~~12~~		19	~~27~~		37	~~48~~		61	~~75~~		91	~~108~~		127	~~147~~		169	~~192~~		217	~~243~~		271 …
1			8			27			64			125			216			343			512			729			1000 …
1^3			2^3			3^3			4^3			5^3			6^3			7^3			8^3			9^3			10^3 …

Bu yazı TÜBİTAK’ın dijital popüler bilim yayını olan Bilim Genç’te yayınlanmıştır.

Bu yöntemi pozitif tam sayıların n. kuvvetler dizisini oluşturmak için de kullanabiliriz:

- ▶ Öncelikle pozitif tam sayıları sıralayıp ardından bu sayılardaki her n. terimi diziden çıkaralım ve kısmi toplamlar dizisini bulalım.
- ▶ Ardından kısmi toplamlar dizisinin her (n-1). terimini diziden çıkaralım ve yine dizinin kısmi toplamlarını hesaplayalım.
- ▶ Bu şekilde yöntemi devam ettirdiğimizde elde edeceğimiz son dizi, pozitif tam sayıların n. kuvvetleri olacaktır.

Yukarıdaki yöntemde görüldüğü gibi elde edilen dizilerden çıkardığımız terimler hep eşit aralıklıdır. Yani küpler dizisini oluşturmak için birinci adımda pozitif tam sayılar dizinin her 3. terimini diziden çıkardık.

Peki sizce dizilerden eşit aralıklı terimleri çıkarmak yerine artan aralıklı terimleri çıkarırsak ne olur?

Moessner teoreminin genelleştirilmiş hâli olarak bilinen bu durumda da özel bir sayı dizisi oluşturulur. Pozitif tam sayılardan terim silmeye 1'den başlayarak atladığımız terim sayısını birer artıralım ve kalan sayıların kısmi toplamlarını hesaplayalım.

~~1~~ 2 ~~3~~ 4 5 ~~6~~ 7 8 9 ~~10~~ 11 12 13 14 ~~15~~ 16 17 18 19 20 ~~21~~ 22 23 24 25 26 27 ~~28~~ ...

2 6 11 18 26 35 46 58 71 85 101 118 136 155 175 197 220 244 269 295 322 ...

Aynı şekilde yönteme devam ettiğimizde aşağıdaki sayıları elde ederiz.

~~1~~ 2 ~~3~~ 4 5 ~~6~~ 7 8 9 ~~10~~ 11 12 13 14 ~~15~~ 16 17 18 19 20 ~~21~~ 22 23 24 25 26 27 ~~28~~ ...

~~2~~ 6 ~~11~~ 18 26 ~~35~~ 46 58 71 ~~85~~ 101 118 136 155 ~~175~~ 197 220 244 269 295 ~~322~~ ...

~~6~~ 24 ~~50~~ 96 154 ~~225~~ 326 444 580 ~~735~~ 932 1152 1396 1665 ~~1960~~ ...

~~24~~ 120 ~~274~~ 600 1044 ~~1624~~ 2556 3708 5104 ~~6769~~ ...

~~120~~ 720 ~~1764~~ 4320 8028 ~~13132~~ ...

~~720~~ 5040 ~~13068~~ ...

5040 ...

Son durumda, sol üstten sağ alta doğru sıralanan sayılar pozitif tam sayıların faktöriyelleridir.

~~1~~ 2 ~~3~~ 4 5 ~~6~~ 7 8 9 ~~10~~ 11 12 13 14 ~~15~~ 16 17 18 19 20 ~~21~~ 22 23 24 25 26 27 ~~28~~ ...

~~2~~ 6 ~~11~~ 18 26 ~~35~~ 46 58 71 ~~85~~ 101 118 136 155 ~~175~~ 197 220 244 269 295 ~~322~~ ...

~~6~~ 24 ~~50~~ 96 154 ~~225~~ 326 444 580 ~~735~~ 932 1152 1396 1665 ~~1960~~ ...

~~24~~ 120 ~~274~~ 600 1044 ~~1624~~ 2556 3708 5104 ~~6769~~ ...

~~120~~ 720 ~~1764~~ 4320 8028 ~~13132~~ ...

~~720~~ 5040 ~~13068~~ ...

5040 ...

1! 2! 3! 4! 5! 6! 7! ...

Moessner teoremi ve onunla ilgili başka bir yöntemi öğrendik. Siz de kendi yönteminizle anlamlı sayı dizileri üretebilirsiniz. ■

Kaynaklar

https://www.cs.cornell.edu/~kozen/Papers/MoessnerNuprl.pdf

https://freethoughtblogs.com/intransitive/2021/07/19/math-rules-the-moessner-miracle-is-way-cool/

https://thatsmaths.com/2017/09/14/moessners-magical-method/