Düşünmek Ya Da Düşünmemekte Direnmek

SUÇ SİZDE DEĞİL

Dr. Herman AMATO
Çizgiler : **Ferruh DOĞAN**

Problemleri çözemiyorsanız kendinizi suçlamayınız. Şimdiye kadar okuduğunuz yazılar size bulanık, anlaşılmaz, içinden çıkılması güç gibi bir duygu vermiş olabilir. Eğer bu duyguya kapılmışsanız kabahati kendinizde bulmayınız. Çoğu zaman yeni başlıyanlar böyle bir duyguya kapılabilir. Bu gayet normal bir duygudur ve buna saygı göstermek lâzımdır. Konu ne kadar basit olursa olsun, ne kadar açık yazılmış olursa olsun günlük alışkanlıklarımızı yenmek son derece güçtür. Çoğu zaman, yılbaşından hemen sonra gene geçen yılın tarihini attığımızı unutmayalım.

Eğer şimdi anlamadınız diye «Bunu ben hiç anlıyamam» duygusuna kapıldıysanız, bu kuruntudan sıyrılmak üzere elinizden geleni yapmalısınız. Bu konuya muhakkak çalışmalı ve başarmak istemelisiniz. Hiçbirşey kazanamazsanız bile başarma kabiliyetinizi görerek kendinize saygı ve güveni tekrar kazanmış olursunuz. Bunun dışında sizi bekliyen mükâfatlar daha da fazladır. Dersleri anlama yeteneğinizin gelişmesi, yarınki olayları önceden planlama disiplinine girmek, istikbale güvenle bakmıya alışmak; birçok olayları önceden görerek onlara karşı tedbir almak ve hakimiyetinizi artırmak; olaylara üsten, kuş bakışı, bakabilmek; en önemlisi deneye dayanan gerçekçi bir görüşe sahip olmak. Hangi meslekten olursanız olsun, karar verme durumunda bulunacaksınız. Ve kararlarınızın isabetinin başarınıza oranı küçümsenemez. Dahası var, eğer kendinizi bu işe kaptırırsanız, ne kadar şiir dolu, ne kadar olağanüstü bir âlemle karşılaştığınıza şaşıp son derece büyük bir zevk duyacaksınız.

Bizde bulabileceğiniz bazı kusurlar. Elimizde olmıyarak sayılar ayda bir çıkıyor. Konuları bir ay ara ile okumak —bazı arkadaşların da belirttiği gibi— çok önemli olan aradaki bağı kavramanıza engel olabilir. Kısa aralarla okumak da, bir fikir sindirilmeden yenisine geçmeğe sebep olduğundan, sonuç vermiyebilir. En iyisi önce problemleri çözmiye çalışmak, çabalamak ve sonra onların cevaplarını bulmak ümidiyle yazılara başvurmak. Hiçbir problemi atlamamak. Sadece problemler yolu ile bu işi hallederseniz mükemmel bir iş yapmış olursunuz. Yazılanları kendiniz keşfetmiye ve keşfettiklerinizin doğru veya yanlış olduğunu anlamak üzere yazılara başvurmaya alışınız. Böyle bir davranış, bu işe tam olarak girmenizi ve onu benimsemenizi sağlar.

Belki aynı çözüm yolunun veya ispatın birçok kereler tekrarlandığını göreceksiniz. Bunlar çok önem verdiğimiz ve muhakkak anlaşılmasını istediğimiz noktalardır. Önemini hissedesiniz diye onları tekrarladık. Biz beş kere tekrarladı isek, sizin onları tam kavramanız için belki elli kere tekrarlamanız gerekecek. Burada söylenen elli rakamı büyütülmüş bir sayı değildir. Büyük ve çok

Şekil 1. Birçok olayları önceden görme yeteneği kazanacaksınız. Yıldız falına bakarak değil. Geçmiş deneylerin ihtimallerine dayanarak.

zaman alan bir sayı da değildir. Esas zaman alan iki üç tekrardan sonra yorulmanız, bu işi yapamıyacağınız kanaati edinmeniz ve işi bütünlük terketmenizdir.

Bizim esaslı bir tek suçumuz var, yer darlığından çok az problem vermiş olmak.

Kendinize bir program çizmeli ve bunu uygulamalısınız. Haftada iki saat bu konuyla uğraşacağınıza karar verdikten sonra, bu saatler nasıl geçerse geçsin, bunda sebat ediniz. İlk önceleri boşuna emek verdiğiniz duygusuna kapılabilirsiniz. Bu duygunun esiri olmayın. Programda sebat ederseniz, 3 - 5 veya 6 hafta sonra konudan zevk duyduğunuzu ve çalışmaya devam etmek istediğinizi göreceksiniz.

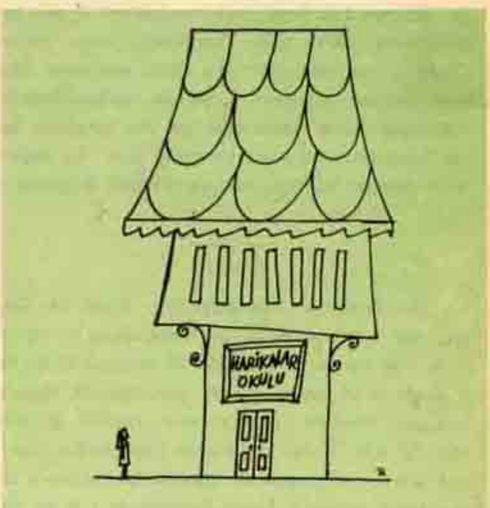
Gecikmiş bir ön söz. Buraya kadar yazdıklarımızla, bu seviyedeki bütün problemleri çözmek için, gerekli bilgiler verilmiş oldu. İlk üç yazıda ihtimal hesaplarının mantıktan başka birşey olmadığı belirtilmeye çalışıldı. Dördüncü yazıdan itibaren rakamların bazı özelliklerine dayanarak aynı problemlerin çözülebileceği gösterilmek istendi

Mantıkla aranız hoş değilse dördüncü yazıdan başlıyarak ve gerektikçe geriye başvurarak okumanızı yapabilirsiniz. Birkaç formül verildi. Eğer formülden hoşlanmıyorsanız problemleri formülsüz de çözebilirsiniz. Aynı problemler sayı sistemleri örnek alınarak çözülebilir. Fakat ilerlemiye karşı düşman değilseniz, daha iyi yapabileceğiniz birşey var: formülleri sevmiye alışmak.

Sayı sistemleri sayesinde hızlı bir sayma usulü öğrenmiş bulunuyoruz: Her basamakta kullanılabilecek temel sayılar birbirleriyle çarpılarak verilen basamak adediyle kaç değişik numara yazabileceğimizi buluruz. Aradığımız ihtimal ilgilendiğimiz numaraların, bütün numaralara oranıdır.

2 li sayı sisteminin diğer bir uygulanışı. Temel sayı 2 olunca, yazılabilecek bütün değişik sayıların miktarının basamak adedi kadar 2 rakamlarının çarpılmasıyla bulunduğunu anlatmıştık. Kullanılan işaretler önemli değildi, miktarları önemli idi. Bu iki işaret 0 ve 1 (bir) olabildiği gibi a ve b gibi iki harf de olabilirdi. Söylediklerimizi a ve b harflerinin yardımıyle tekrar açıklıyalım. Önce a ve b harflerini ayrı ayrı yazarsınız. Bunlara birer basamak ekliyerek, herbirinin yanına hem a hem de b yi nöbetleşe getirerek, bunlardan ikişer sayı türetirsiniz. İki basamaklı sayılar böylece 4 $(= 2^2)$ olur (a nın yanına a ve b nin nöbetleşe gelmesiyle aa, ab; b nin yanına a ve b nin nöbetleşe gelmesiyle ba, bb). Bu dört (aa, ab, ba, ba) iki basamaklı sayıdan 3 üncü basamağın yardımıyla, gene aynı şekilde ikişer türeterek, 8 $(= 2^3)$ üç basamaklı sayı türetebilirsiniz (aaa, aab, aba, abb, baa, bab, bba, bbb). Aynı şekilde devam ederek n basamakla yazılabilecek bütün sayıların adedinin ikinin n defa yazılıp çarpılmasına veya kısaca 2^n e eşit olduğunu görürüz.

Şimdi $(a+b)^3$ gibi tanıdığımız bir formülün genel şekli $(a+b)^n$ ifadesi üzerinde duralım. Bunu açık olarak yazmak için $(a+b)$ ifadesini n defa yanyana yerleştiriz. Bunlar çarpılacak anlamına gelir. Eğer aradaki + lar gibi bazı işaret farklarına önem vermezseniz, cebirsel çarpım işleminin biraz önce açıkladığımız, basamaklar ekliyerek yeni sayılar türetme işlemiyle aynı işlem olduğunu görürsünüz. Birinci parantezde a ve b vardır. İkinci parantezdeki a ve b nin yardımıyla



Şekil 2. Hiç çekinmeden bu eğitime başlayın. Sebat ederseniz şiir dolu, olağanüstü bir âlemin kapıları size açılacaktır.

bunların her birinde ikişer terim türetiriz. Böylece 4 $(= 2^2)$ terim elde ederiz $(a+b)^2 = (aa+ab+ba+bb)$. 3 üncü parantezin eklenmesiyle bu dört terimden gene aynı şekilde ikişer türeterek 8 $(= 2^3)$ terim elde ederiz: $(a+b)^3 = (aaa+aba+baa+bba+aab+abb+bab+bbb)$

Yani $(a+b)$ gibi her parantez yeni bir basamak eklemiye karşılık oluyor. Temel sayı 2 olduğuna göre n adet parantez ile yazılabilecek terimlerin sayısı 2^n olur. Bu 2^n terim a ve b işaretleriyle yazılabilecek, n basamak ihtiva eden bütün terimleri kapsamaktadır. Daha iyi canlandırmak için a ları birbirine tıpatıp benziyen beyaz adamlar gibi düşünelim, b lere de aynı şekildeki siyah adamlar gözüyle bakalım. n e örneğin, 7 diyelim ve bunların yardımıyle yapılabilecek bütün 7 li sıraların nasıl olabileceğine bakalım. Once tamamen beyazlardan yapılmış bir 7 li sıra ile başlarız. Beyazlardan birini çıkarır yerine bir siyah koyarız. Böylece bir siyah ve 6 beyaz adamdan müteşekkil bir 7 li sıra elde ederiz. Siyahları birer birer artırarak ve her seferinde bir beyaz çıkararak sonunda 7 siyahtan müteşekkil bir sıra elde ederiz. Bunlar siyah ve beyaz adamlarla yapılabilecek bütün 7 li sıralar değildir. Çünkü örneğin 3 siyah ve 4 beyazdan yapılmış bir yer değiştirerek çeşitli değişik sıralar yapabilir. 7 li sıradaki siyah ve beyaz adamlar aralarında 3 siyah yanyana olabileceği gibi tamamen karışık olarak beyazların arasına girebilir; siyahlar başta bulunabileceği gibi ortada da bulunabilir. Böylece kaç farklı sıra yapılabilir? 7 den yapılabilecek bütün üçlü seçimlerin sayısı kadar. Çünkü 7 yeri mümkün olan bütün şekillerde üçer üçer seçerek siyahları o yerlere yerleştirebiliriz. Tabiatıyle geriye kalan dört yer her seferinde beyaz adamlar tarafından tutulmuş olur. Bu seçimlerin sayısını bulmıya yarıyan formülü biliyoruz :

$$\frac{n!}{r!(n-r)!}$$

Bu formülün ispatlanışı için Bilim ve Teknik, sayı : 39 a bakın. Bu formülde n in yerine 7 ve r in yerine 3 koyarsak, 35 buluruz ki bu da 3 siyah ve 4 beyaz adamla yapılabilecek değişik sıraların adedidir. r siyahların adedini gösteriyor. Bu adet 0 dan (tamamen beyazlardan yapılmış sıra) n e (tamamen siyahlardan yapılmış sıra) kadar artabilir. Seçim formülünde r e bu değerleri vererek, her değer için yapılabilecek sıra adetlerini bulabiliriz. (7 unsur ihtiva eden bu örnekte, $r=0$ için 1, $r=1$ için 7, $r=2$ için 21, $r=3$ için 35, $r=4$ için 35, $r=5$ için 21, $r=6$ için 7 ve $r=n=7$ için 1 sıra buluruz. Bu sıraların toplamı 2^n e eşit olmalıdır. Gerçekten bunları toplarsak 128 buluruz ki burada $n=7$ olduğundan, 2^7 ye eşittir).

Siyahların adedinin genel olarak r ile gösterildiğini söylemiştik, her sıra n kişiden (unsurdan) yapılmış olduğundan beyazların adedi (n-r) olur. Beyazların a ları ve siyahların b leri temsil ettiğini ve sıradaki unsurların çarpıldığını hatırlarsak her sıra için r kadar b yi ve (n-r) kadar a yı birbirleriyle çarparak o sıranın değerini bulacağımızı anlarız. Bu değer $b^r a^{(n-r)}$ şeklinde gösterilir (örneğin, $bbbaaaa = b^3a^4$).

Belirli bir r sayısını bulunduran sıraların adedi yukarıda da söylediğimiz gibi seçim formülü ile bulunur $(n!/r!(n-r)!)$. Aynı r değerini taşıyan sıraların toplam değerini bulmak için, bunlardan birinin değerini $(b^r a^{(n-r)})$ bu değerdeki bütün sıraların adedi ile $(n!/r!(n-r)!)$ çarparız. Böylece aşağıdaki formülü elde ederiz :

$$(a+b)^n = \sum_{r=0}^{r=n} \frac{n!}{r!(n-r)!} b^r a^{(n-r)}$$

Σ işaretinin toplama anlamına geldiğini biliyorsunuz. Bu işaretin altındaki $r=0$, ve üstündeki $r=n$, r in alabileceği değerlerin alt ve üst hudutlarını göstermektedir .Yani bu formüldeki r e 0 dan n e kadar değişik değerler verilerek sonuçlar ayrı ayrı hesaplanacak ve bütün bu hesaplar toplanacak.

Özel bir hal için $(a+b) = 1$ (bir) ise $(a+b)^n = 1^n$ de 1 (bir) e eşit olur. Bu hal için b nin yerine işaret değiştirerek p dersek, a ile b nin toplamı 1 (bir) e eşit olduğundan $a = 1-p$ olur yukariki ifade şu şekli alır.

$$[p+(1-p)]^n = \sum_{r=0}^{r=n} \frac{n!}{r!(n-r)!} p^r(1-p)^{(n-r)}$$

Bu formülün geçen sayıdaki formülün genel hali olduğunu anladınız, değil mi? Artık ismini verebiliriz : Binom formülü.

Belki henüz kullanmıya alışık değilsiniz, ileride verecegimiz örneklerle daha alışacaksınız. Bu formülü bilmeden çözdüğümüz bir problemi bu formül yardımıyle çözelim.

Bir zarı 3 defa atarak $(n=3)$ hiç altı elde etmemek $(r=0)$, 1 defa 6 elde etmek $(r=1)$, 2 defa 6 elde etmek $(r=2)$, 3 defa 6 elde etmek $(r=3)$ ihtimallerini hesaplayınız. Bir atışta 6 elde etme ihtimali 1/6 dır. O halde $p = 1/6$ olduğu için $1-p = 5/6$ olur.

Bu problemi çözmek için değerleri yerine koyarız. Yalnız şunu bilmek lâzımdır. 0! ve üstü 0 (sıfıra) eşit olan sayıların değerleri 1 e eşittir.

Böylece $r=0$ için 125/216, $r=1$ için 75/216, $r=2$ için 15/216, $r=3$ için 1/216 buluruz. Bunları toplarsak,

$(5/6 + 1/6)^3 = 125/216 + 75/216 + 15/216 + 1/216 = 1$ buluruz.

Bu çözümü ayrıntılarıyle yapın ve 34 üncü sayıdaki çözümle karşılaştırın. Bir formül öğrenmekle bu işi ne kadar basitleştirmiş olduğunuza kanaat getirin. Hep basit ve hayatla ilgisiz gibi görünen örnekler vermemiz, sizin dikkatinizi örneklerden ziyade çözüm yollarına çekmek istediğimiz içindir. İleriki sayılarda çözüm yollarını öğrendikten sonra çok daha canlı örnekler vereceğiz.

Sıfırın bir anlamına geldiği iki durum. Sıfırın yanına bir ünlem işareti koyarsanız 1 olur. Bu yukarıdaki formülün $r=0$ ve $r=n$ halinde de kullanılabilmesi için matematikçiler arasında varılmış bir anlaşmadır. Daha derin sebep aramak için kafanızı yormayın.

Herhangi bir sayının üstü 0 (sıfır) olunca o sayı da bire eşit olur. Logaritmada bölüm yerine üstler çıkarılır. Eğer bölünen sayılar eşitse logaritmalar da eşit olacak ve logaritmalar (veya üstler) arasındaki fark 0 (sıfır)a eşit olacaktır. Eşit sayılar bölününce 1 verdiğinden üstü 0 olan sayılar 1 kabul edilir.

YENİ PROBLEMLER

1) 3 kişi 5 sandalyeye kaç farklı şekilde oturabilir.

2) 3 kişi herbiri 3 kişi alabilecek 5 kanapeye kaç farklı şekilde oturabilir. (Kanapelere 1 den fazla kişi oturunca bunların aralarında yapabileceği değişik sıralar hesaba katılmıyacak).

GEÇEN SAYIDA VERİLEN PROBLEMLER VE ÇÖMÜZLERİ

1) 5 kız ve 5 oğlandan yapılmış 10 kişilik bir gruptan kaç farklı ikili seçimler yapabiliriz?

Seçimle ilgili formülü kullanıyoruz, $n = 10$, $r = 2$.

$$\frac{10!}{2! \times 8!} = 45$$

2) 5 kız ve 5 oglandan kaç farklı evli çift yapabilirsiniz?

5 li sayı sistemine göre iki basamaklı sayılar yazıyoruz sonuç 25 olur.

3) 3 kız ve 2 oğlandan ibaret aileler doğum sırasına göre kaç farklı şekilde meydana gelebilir?

5 ten yapılabilecek çeşitli 2 li seçimler kadar değişik aileler yapabiliriz.

$$\frac{5!}{2! \times 3!} = 10.$$

DÜŞÜNDÜRÜCÜ SÖZLER

Uzun yıllardanberi «birşeyler bulmak» işinde çalışıyorum. Burada kazandığım tecrübe bana göstermiştir ki, Tanrı yarattığı her problem için bir de çözüm yaratmıştır. Eğer bu çözümü ne siz, ne de ben bilemiyorsak, her ikimiz de büyük bir tevazu ile kendimizin beceriksiz çılgınlar olduğunu itiraf edelim ve hiç bir zaman bunun kabahatini Tanrıya yüklemeyelim ve onun «imkânsız» birşey yarattığına inanmayalım.

Edison

Doğa herşeyi ne güzel tertiplemiştir. Bir çocuk dünyaya gelri gelmez, karşısında onun bütün ihtiyaçlarını karşılayacak bir Anne bulur.

J. Michelet

Fikirlerin farklılığı, hem dokunuş hem de desen bakımından birbirine benzemeyen kumaş parçaları gibidir. Gerek dokunuş şekli ve gerek desen tartışmanın niteliğini belirler.

Norman Shılda

Eğer insanlar farklı fikirlere sahip olmasalardı, at yarışları olmazdı.

Mark Twain