Cam Klein Şişeleri

Alan Bennett İngiltere'de Bedford'da yaşayan bir cam üfleyicidir. Birkaç yıl önce topolojide ortaya çıkan giz dolu şekillerden (Möbius bantları, Klein şişeleri vb) etkilendi. Bir matematikçi bunları hesap yaparak çözebilirdi. Bennett onları cam şekiller yaparak çözdü. Yaptığı birbirinden ilginç şekiller, gerçekte cam şeklinde donmuş araştırma projeleri, Londra Bilim Müzesi'nde sürekli olarak halka gösterilmektedir.

Topolojistler cisimlerin germe, burma vb ile değişmeyen özellikleri üzerinde dururlar; yeter ki cisim bu biçim değiştirmeleri sırasında yırtılmasın veya kesilmesin. (Aslında cisim geçici olarak kesilebilir; fakat tekrar birleştirildiğinde, kesik boyunca birbirine yakın noktalar, tekrar birbirine yakın olmalıdır). Topolojik özellikler arasında şunlar sayılabilir: Şekil tek parçadan mı, bir çok parçadan mı oluşmuştur? Şekil düğümlü veya eklenmiş midir? Şeklin içinde delikler var mıdır?

En iyi bilinen topolojik biçimler, ilk bakışta ilginç oyuncakları andırır; fakat önemleri fazladır. Örneğin, Möbius bandını alalım; bunu yapmak için uzun bir kâğıt şerit alıp uçlardan birini 180° burduktan sonra, iki ucu yapıştırmak yeterlidir. Möbius bandı tek yüzlü en basit yüzeydir. İki boyacının biri Möbius bandının "dışa" bakan yüzünü kırmızıya, biri de "içe" bakan yüzünü maviye boyasaydı, sonunda bant üzerinde birbirleriyle karşılaşırlardı. (Bu, tek bir yüz olduğunu kanıtlar; çünkü örneğin bir silindirin dış ve iç iki yüzü olduğu için dışını ve içini boyayan boyacılar asla karşılaşamazlar).

Eğer kâğıt bandı bir değil, birçok kere burarsak (burmak deyince 180° çevirmek anlayacağız) çeşitli Möbius bantları elde ederiz. Topolojist için önemli olan şudur: Kâğıt bandı tek sayıda burarsak (1,3,5...) tek yüzlü bir yüzey, çift sayıda burarsak (2,4,6) iki yüzlü bir yüzey elde ederiz. Kâğıt şeridin bir ucunu tek sayıda burmak, topoloji bakımından Möbius bandının aynı olan bantlar oluşturur. Bu şundan da bellidir: Bantı kesin ve biri dışında bütün burmaları tersine burun. Böylece, çift sayıda burmayı düzelttiğinizden, kesilmiş uçların birleştirilmesi yeni bir Möbius şeridi oluşturur.

Aynı nedenle, çift sayıda burulmuş bütün bantlar, topolojik olarak silindirin aynısıdır; çünkü silindirin yüzeyi de burulmamıştır. Bantın kaç defa burulduğu topolojik önem taşır; çünkü buruş sayısı, bandın çevresindeki uzayda nasıl yer aldığını da belirler. Burada iki önemli soru vardır: Birincisi bandın geometrisi, ikincisi ise bandın uzaydaki durumudur. Bunlardan ilki buruş sayısının tek veya çift oluşuyla, diğeriyse buruşların mutlak sayısıyla ilgilidir.

Spiral bir eğri boyunca kesilmiş orijinal Klein şişesi.

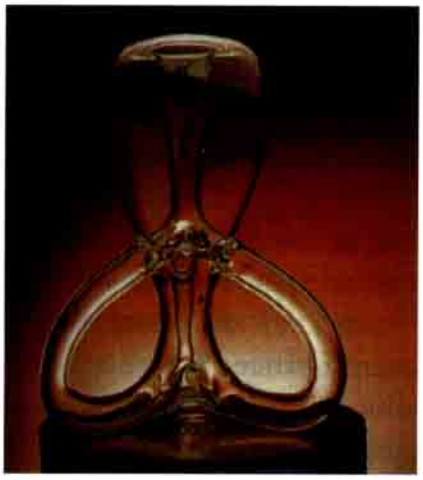
Alan Bennett'in cam üfleyerek yaptığı tek yüzeyli Klein şişesi.

Möbius bandının bir sınırı vardır: Bandın serbest kenarı. Bir küreninse sınırı yoktur. Tek yüzlü bir yüzeyin kenarının olmaması olası mıdır? Yanıt, evet'tir. Böyle bir yüzey olabilir: şu koşulla ki üç boyutlu bir uzayda böyle bir yüzey kendini kesmeden var olamaz.

Bu, topolojistler için bir sorun değildir; onlar, üçten fazla boyutu olan uzaylarda bulunan veya etrafında hiç uzay olmayan yüzeyler hayal edebilirler. Fakat cam üfleyicileri için bu kaçınılmaz bir engeldir.

Yandaki resimde Bennett tarafından üflenmiş camdan bir Klein şişesi görülüyor. Normal bir şişeden farklı olarak, şişenin boynu kıvrılarak yan yüzeyinden içeri daldırılmış, şişenin gövdesiyle içten birleştirilmiş ve sonra şişenin yüzeyine bir delik şeklinde açılmıştır. Cam Klein şişesi küçük, kapalı bir eğri boyunca kendini çaprazlar; fakat topolojistler, ideal Klein şişesini düşünürken bu çaprazı dikkate almazlar.

Bir Klein şişesini boyadığınızı hayal edin. Boyamaya büyük, şişkin bölümün dışından başlıyorsunuz ve dar boyuna kadar geliyorsunuz. Boynun gövdeyi çaprazladığı noktaya geliyorsunuz; fakat bunu dikkate almayarak, artık gövde içine gömülmüş olan boynu boyamaya devam ediyorsunuz. Gele gele boynun şişkin bölümda bir delikle yüzeye açıldığı yere gelirsiniz.



3 boyunlu Klein şişesi

İçiçe 3 Klein şişesi

7 burmalı iki banda bölünebilen spiral Klein şişesi

Spiral Klein şişesinin değişik bir şekli

Boyamaya devam ederseniz, şişkin bölümün iç yüzünü boyadığınızı görürsünüz! Şişenin içi ve dışı dikişsiz olarak birbiriyle birleşmiştir. Klein şişesinin iç ve dış yüzleri, kararsız ve eksiz birbirlerini takip ederek tek bir yüzey oluşturur. Bennett, Klein şişesinin uygun bir eğri boyunca kesilince iki Möbius bandı verdiğini duymuştu. Eğer bu işi normal uzayda bulunan cam bir Klein şişesinde yaparsanız, bu bantlarda tek bir burma olduğunu görürsünüz.

Bennett şunu düşündü: Acaba nasıl bir şekil yapmalı ki ikiye bölününce iki adet üç burmalı Möbius bandı versin.

Bennett bunu başarabilmek için Klein şişesinin 3 sayısıyla oluşturulabilecek değişik şekillerini inceledi: Örneğin 3 boyunlu şişeler ve şaşılacak şekilde birbiri içinde 3 şişe. Hayalinde bunlar ortadan kesilince ne olacağını düşünüyordu; hatta camdan yaptığı bu gibi şişeleri elmas testereyle ortadan kesip ne çıktığına baktı.

Çözüm çok garip bir şişede bulundu: boynu kendini üç kere çaprazlayarak iki sarmal halkası yapan bir şişe. Buna "Ouslam kabı" adını verdi; Ouslam, giderek küçülen daireler çizerek kendi arka ucunda sol-sağ simetrisi sağlayıp kaybolan bir masal kuşuydu. Ouslam kabı dikine bir düzlemle ikiye bölünürse (şekilde kâğıt düzlemi) herbiri üç kere burulmuş iki Möbius bandı oluşur; problem çözülmüştür.

Bir matematikçi gibi Bennett de daha büyük oynamak istiyordu. Örneğin 5 burmalı bant? 19 burmalı bant? Genel kural neydi? Bennett hızla anladı ki her sarmal halkası iki burma ekliyordu. Örneğin Ouslam kabına bir sarmal halkası daha eklenince 5 burmalı Möbius bantları elde ediliyordu.

Bunun üzerine tasarımı basitleştirip güçlendirerek spiral (helisel) biçimli bir Klein şişesi yaptı. Yanda sol alttaki resimde, Klein şişesi ortadan ikiye bölünürse, herbiri 7 burmalı iki Möbius bandı elde edilir. Her spiral halka 2 burma ekler. İkinci resimde spiral biçimli Klein şişesinin topolojik olarak değişik bir şekli görülmektedir.

Spiral halkaların önemini kavrayan Bennett, spirali "tersine burarak" orijinal Klein şişesine erişebileceğini anladı. Spiral biçimli Klein şişesini ikiye bölen çizgi de biçim değiştiriyordu. Şişenin boynu tersine buruldukça kesme çizgisi de buruluyordu. Böylece bir Klein şişesini spiral bir eğri boyunca ikiye bölerseniz, istediğiniz sayıda burma elde edebilirsiniz.

Son bir ilginç nokta: Başlangıçta bir Klein şişesini ikiye bölerek tek burmalı iki Möbius bandı oluşturmak istenmişti. Klein şişesini farklı bir eğri boyunca öyle kesebilirsiniz ki tek bir Möbius bandı oluşur. Bunun çözümünü size bırakıyoruz.

Scientific American Mart 1998
Çeviri: Selçuk Alsan

İki Möbius Bandı. Bunları bir Klein şişesinin yukarıdan aşağı bir kesiti olarak düşünebiliriz.

Ouslam kabı: Şişenin boynu iki spiral halka yapar, dikine ortadan kesilince her biri 3 burmalı iki Möbius bandı oluşur (noktalı çizgiler görmeyi kolaylaştırmak için eklenmiştir).