

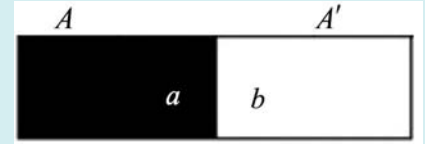
BULANIK MANTIK

Matematik deyince ilk akla gelen kesinliktir. Halbuki günlük hayatta konuşmalarımız arasında belirsizlik içeren, orta yaşlı insan, uzun zaman, pahalı araba, yüksek bina gibi anlamı kişiden kişiye ve duruma göre değişen birçok sözcük kullanılır. Klasik mantığın tanımlamadığı bu tür belirsizliklerin çoğunlukla bilimsel olmadıkları düşüncesi kabul görmesine rağmen, 19. yüzyılın başlarında bu tür belirsizlikler üzerine birçok filozof kafa yormuş. Einstein bu durumu şu şekilde ifade etmiş: “Matematiğin kavramları kesin oldukları sürece gerçeği yansıtmazlar, gerçeği yansıttıkları sürece de kesin değillerdir”. 1920’lerde Heisenberg ortaya ilk belirsizlik kavramını atarak bilimi çok değerliliğe zorlamıştı. 1930’ların başlarında Lukasiewicz ilk üç-değerli mantık sistemini ve aynı dönemlerde kuantum filozofu Black de sürekli değerlere sahip mantığı tanımladı. Pek az batılı filozof çok değerliliği benimsemesine rağmen, Lukasiewicz, Gödel ve Black, ilk çok değerli mantık ve kümeler üzerinde kuramsal olarak çalışmalarını sürdürdüler, ancak kendilerine bir uygulama alanı bulamadılar. Belirsizliğin, modern anlamda matematiksel olarak modellenmesinde önemli bir dönüm noktası, 1965’te California Berkeley Üniversitesi’nden Azeri kökenli Amerikalı matematikçi Lutfi Askerzade Zadeh’in bulanık mantık (fuzzy logic) ve dolayısıyla bulanık küme kuramını tanımlaması oldu.

Zadeh bu kuramında, matematiğin, dil ve insan zekasını ilişkilendirebileceğini ve bulanık mantığın gerçek hayatın daha iyi bir modelini oluşturduğunu göstermesine rağmen, bilim camiasından pek ilgi görmediği gibi tenkitlerle karşılandı ve hatta ABD Ulusal Bilim Vakfı (National Science Foundation) tarafından kaynakların boşa harcanmasına örnek olarak gösterildi. 1972 yılında İngiltere’de İran kökenli Ebrahim Mamdani’nin, bir buhar makinesi için, bulanık mantık kuramını kullanarak bir kontrol edici tasarlaması, dünyanın ilgisini bu konuya çekti. Bulanık mantığın ilk ticari uygulamasının, 1980’de, Danimarka’da bir çimento fabrikasının kontrolünde kullanılmasından sonra, başta Japonya olmak üzere dünyadaki birçok ülke araştırma ve mühendislik uygulamalarıyla bu konuda büyük gelişmeler kaydettiler. Özellikle, elektronik aletlerin ana yapılarını oluşturan transistör veya algoritmalar gibi anahtarlama araçlarında yoğun olarak bulanık mantık kullanılır.

Bulanık mantık ve bulanık kümeleri, klasik mantık (Aristo mantığı) ve onun doğruduğu klasik kümelerle birlikte vermemiz, aralarındaki farkı görme ve karşılaştırabilme açısından kolaylık sağlayacaktır. Bilindiği gibi, klasik mantık, yanlış veya doğrudan biriyle betimlenen ve kesin hüküm belirten “Üç ikiden büyük bir tamsayıdır.”, “Ahmet kırk yaşındadır” gibi, önerme dediğimiz ifadelerle çalışır. Bir x değişkene bağlı, $p(x) = “x ikiden büyük bir tamsayıdır”, q(x) = “x kırk yaşındadır” gibi önermelere de açık önermeler denir. Bu önermelerle matematiğin temel taşlarından biri olan kümeleri inşa ederiz. Kitaplarda, klasik kümelere, “iyi tanımlanmış nesnelere topluluğudur” denir. Önermeler kesin hüküm belirttikleri için, bir açık önermeyi doğru yapan değişkenler iyi tanımlanmış olurlar ve bunların topluluğu matematikte küme olarak tanımlanır. Örneğin, $p(x)$ açık önermesinin, yani ikiden büyük bütün tamsayıların oluşturduğu bir küme, $A = \{x: p(x)\}$ biçiminde veya açık olarak $A = \{x: x > 2, x \in \mathbb{A}\}$ biçiminde veya daha açık olarak $A = \{3, 4, 5, \dots\}$ biçiminde yazılır.$

Klasik mantıkta, önermeler ya doğrudur ya da yanlıştır, üçüncü bir seçenek yoktur. Bu nedenle, bir $p(x)$ önermesi ve onun olumsuzu (değili) $\neg p(x)$ önermeleri için $p(x) \wedge \neg p(x)$ ve $p(x) \vee \neg p(x)$ bileşik önermelerine sırasıyla çelişki (kesin yanlış) ve toloji (kesin doğru) denir. Birincinin anlamı, bir önermenin aynı anda hem yanlış hem de doğru olamayacağıdır. İkincinin anlamıysa bir önerme ya yanlıştır ya da doğru olacaktır. O halde, bir $p(x)$ önermesini doğru yapan değerler bir A kümesini oluşturuyorsa, doğru yapmayanlar (yanlış yapanlar) da bu A kümesinin tümleyeni A' kümesini oluştururlar. Böylece bir küme, üzerinde işlem yapılan E evrensel kümenin elemanlarını, kümeye ait olanlar ve ait olmayanlar diye ikiye böler. Bu net ayırmadan dolayı, E evrensel kümesinde tanımlı herhangi bir A kümesi için $A \cup A' = E$ ve $A \cap A' = \emptyset$ eşitlikleri elde edilir. Bu durum venn şeması Şekil 1’de verilmiştir; burada A siyah ve tümleyeni beyaz bölgeden ibarettir. Kesin olarak $a \in A$ ve $b \notin A$. Görüldüğü gibi klasik mantığın doğruduğu kümeler, doğadakinin aksine, yaşadığımız dünyayı siyah/beyaz, doğru/yanlış, iyi/kötü gibi kategorize ederek ikiye bölen birbirine zıt ikili kavramlarla inşa edilir.



Şekil 1. Klasik Küme

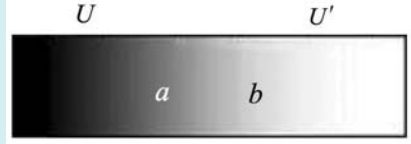
Klasik mantıkta bir önermenin doğruluk değeri, doğrular için 1 ve yanlışlar için 0 kullanılır, E evrensel kümesindeki bir A kümesi, matematiksel olarak $\chi_A: E \rightarrow \{0,1\}$ fonksiyonuyla karakterize edilir. Burada, A kümesine ait elemanlara 1 değerini, ait olmayan elemanlara ise 0 değerini veren χ_A fonksiyonuna A kümesinin karakteristik fonksiyonu denir. Bu sayede, bilgisayar tarafından algılanabilir, Boolean cebirinin temeli olan ikili sayı sistemine geçiş yapılmış olur.

Halbuki, gerçek dünya hiç de öyle siyah ve beyazdan ibaret değildir, orada siyah ile beyazın arasında, Şekil 2’de olduğu gibi, sonsuz renk tonu vardır. Konuşma dilinde ifade edilen ve üzerinde çalıştığımız çoğu sınıflandırmalarda kullandığımız, kesin sınırlarla tanımlanamayan ve kişiden kişiye farklı yorumlanan “çok güzel”, “fazla uzun”, “aşırı sıcak”, “hafif pahalı”, “biraz tatlı” gibi bulanık kavramlar klasik mantığın öngördüğü şekilde incelenemezler. İşte bu tür terimlerle ifade edilen “Aşçe çok güzel.”, “Hava aşırı sıcak.”, “Amcam epeyce yaşlı.” gibi ifadeleri, kesin hüküm belirtmediğinden, klasik mantık önerme olarak kabul etmez ve bu kavramlarla da klasik anlamda küme tanımlanamaz. İşte, bu tür önermelere *bulanık önermeler* ve bunlarla uğraşan mantığa da *bulanık mantık* denir.

Bulanık önermelerin doğruluğu veya yanlışlığı hakkında kesin bir şey söylenemeyeceğinden dolayı bunların doğruluk değeri, $[0,1] = \{x: 0 \leq x \leq 1, x \in \mathbb{A}\}$ gerçel sayılar kümesinden bir sayıyla derecelendirilir. Bir bulanık önerme, derecesine göre hem doğru ve hem de yanlış olabilir. Bulanık bir önerme için “doğru değildir” denmiş ise bu, “yanlıştır” anlamına gelmez. Bir önerme 0,8 derecesinde doğru ise aynı önerme 0,2 derecesinde de yanlıştır. Örneğin, “Aşçe çirkindir” önermesi 0,5 derecesinde doğru ise aynı derecede de yanlıştır. Anlaşılacağı gibi, klasik önermelerdeki çelişme ve toloji burada geçerli değildir. Bu özellikten dolayı, klasik mantıkta problem olan paradokslar, hem “doğru” hem “yanlış”, ya da ne “doğru” ne de “yanlış” doğru-

luk değerine sahip önermeler, bulanık mantıkta doğruluk değerleri olarak biraz da olsa doğrulara indirgenmiş olurlar.

Bulanık önermeleri oluşturan bulanık terimlerin her biri bir “bulanık küme” ile modellenir. O halde, bir bulanık önermenin oluşturduğu bir bulanık küme, çalışma yapılan alana ait her bir bireye matematiksel olarak kümedeki aittlik derecesini temsil eden $[0,1]$ aralığındaki gerçel sayılardan bir değer atayarak tanımlanır. Bu değer, elemanın bulanık küme tarafından ifade edilen kavramın uygunluk derecesini ifade eder.



Şekil 2. Bulanık Küme

Şekil 2’de de görüldüğü gibi, siyahla betimlenen bulanık bir U kümesinin sınırları, klasik kümelerde olduğu gibi, kesin çizgilerle belirlenemez. Çünkü artık burada, siyah-beyaz kriterler, gri tonlarıyla değiştiriliyor ve karşımıza bulanık bir küme kavramı otaya çıkıyor. Elemanların aidiyeti kesin sınırları olmayan bulanık yapı içinde kalıyor ve burada gözükün a ve b elemanları farklı tonlardaki gri bölgelerde bulduklarından, farklı derecelerde U ve tümleyeni U' kümesine ait olurlar.

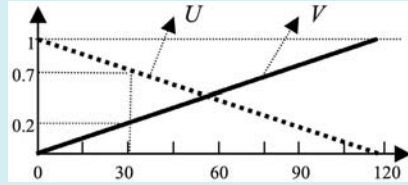
Tam üye olma ve üye olmama durumu, bulanık kümede de sırasıyla 1 ve 0 değerleriyle karşılanır. Dolayısıyla, klasik küme kavramı bulanık küme kavramının bu iki değere kısıtlanmış özel bir halidir. Bu nedenle, bulanık kümelerin matematiksel olarak ifadesi, klasik kümelerin karakteristik fonksiyonunun $\{0,1\}$ değer kümesinin, $[0,1]$ gerçel sayılar aralığına genelleştirilmesiyle yapılır. Buradan, bulanık kümelerin klasik kümelere bir seçenek değil, onların genelleştirilmiş olduğu görülür. Rasyonel sayılar, nasıl tam sayılara seçenek olmayıp onları da kapsayan daha işlevli bir sayı kümesi ise, bulanık kümeler de klasik kümeleri kapsayan daha geniş kümelerdir.

Matematiksel olarak, E evrensel kümesindeki bir bulanık U kümesi $\mu_U(x): E \rightarrow [0,1]$ şeklinde karakterize edilir. Buradaki μ_U fonksiyonuna bulanık U kümesinin üyelik fonksiyonu denir. Bulanık U kümesi, E deki her elemanın üyelik derecesiyle birlikte oluşturduğu ikililer kümesidir.

$$U = \{(x, \mu_U(x)) : x \in E, \mu_U(x) \in [0,1]\} \quad (1)$$

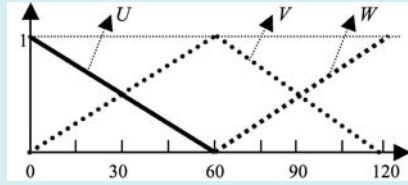
burada μ_U değeri x 'in U kümesine üyelik (aitlik) derecesini gösterir. Üyelik fonksiyonları birçok farklı şekilde tanımlanabilirler. Üyelik fonksiyonlarının inşası, kişilerin görüş ve değer yargılarına dayanır. Bu nedenle bu fonksiyonlar kişiden kişiye ve duruma göre değişirler.

Bulanık kümeler, kesin çizgilerle gösterilemeyeceğinden, venn şema gösterimlerinden söz edilemez ve bunun yerine bulanık kümelerin üyelik fonksiyonlarının grafiğiyle gösterilirler. (Şekil 2, U ve U' bulanık kümelerinin venn seması olarak değil, sadece bulanıklığı vurgulamak için verilmiştir). Örneğin, $u(x) = “x$ gençtir” ve $v(x) = “x$ yaşlıdır” bulanık açık önermeleri, $E = [0,120]$ evrensel kümesinde, sırasıyla U gençler ve V yaşlılar bulanık kümelerini oluştururlar. Bunların üyelik fonksiyonlarının grafiklerine bir örnek, Grafik 1’de verilmiştir.



Grafik 1. Genç ve yaşlılar bulanık kümeleri

Bu grafiğe göre, 30 yaşındaki birisi 0,2 üyelik derecesiyle V yaşlılar bulanık kümesine ait ve 0,7 üyelik derecesiyle U gençler bulanık kümesine aittir. Burada yaş kavramı, genç ve yaşlı iki bulanık küme üzerinde incelenmiştir; bunu istediğimiz kadar çoğaltabiliriz. Bunu, örneğin, “genç”, “orta yaş”, “yaşlı” olarak üç bulanık kümede veya “çok genç”, “genç”, “orta yaşlı”, “yaşlı”, “çok yaşlı” gibi beş bulanık kümede inceleyebiliriz. Örneğin, “genç”, “orta yaş” ve “yaşlı” kişilerin oluşturduğu U, V ve W bulanık kümelerinin grafiğini, Grafik 2’deki gibi verebiliriz.

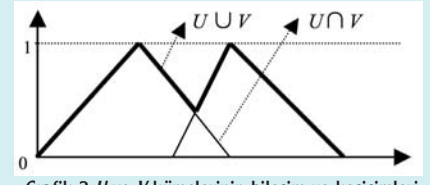


Grafik 2. Genç, orta ve yaşlılar bulanık kümeleri

Biz burada, hesaplama açısından getirdiği kolaylıkları göz önüne alarak, üyelik fonksiyonlarının inşasında doğrusal fonksiyonlar kullandık. (1)’deki şartı sağlayan parabolik, hiperbolik, çan eğrisi gibi her türlü fonksiyon kullanılabilir. Hangi fonksiyon daha uygun olup olmayacağı, çalışılan uygulama alanı tarafından elde edilen verilere bağlıdır. Bulanık kümeler üzerine kurulan matematiksel yapı, klasik matematikten daha açıklayıcı bir güce sahiptir, fakat kullanılabilirliği, uygulama alanlarında ortaya çıkan kavramlar için uygun üyelik fonksiyonlarının inşa edilmesine bağlıdır. Yani, bulanık kümelerin kullanılabilirliği, farklı kavramlara uygun üyelik derecesi fonksiyonlarını oluşturabilme becerimize bağlıdır. Bu da bulanık küme kavramının pratik yararını artıran en önemli yönlerinden biridir.

Klasik kümeler üzerinde tanımlanan temel işlemlerden olan birleşim ve kesişim işlemleri, bulanık kümeler üzerinde maksimum ve minimum fonksiyonları kullanılarak tanımlanmıştır. Bunun, matematiksel doğruluğunun yanında insan düşüncesine yakınlığı da görülmektedir. Herhangi bir kimsenin birden çok bulanık önerme kullanarak akıl yürüteceğini varsayalım. Eğer önermelerin hepsi “veya” bağlacıyla bağlıysa ortak doğruluk değeri olarak, doğruluk durumuna olabildiğince yakın olmak isteneceğinden, önermeler içinde doğruluk değeri maksimum olanı seçilecektir. Eğer önermelerin hepsi “ve” bağlacıyla bağlıysa ortak doğruluk değeri olarak, en kötü durum bilinmek isteneceğinden, önermeler içinde doğruluk değeri minimum olanı seçilecektir.

E evrensel kümesinde verilen herhangi iki bulanık U ve V kümelerinin üyelik fonksiyonları sırasıyla $\forall x \in E$ için $\mu_{U \cap V}(x) = \min\{\mu_U(x), \mu_V(x)\}$ ve $\mu_{U \cup V}(x) = \max\{\mu_U(x), \mu_V(x)\}$ olarak tanımlanırlar ve Grafik 3’te bunların bir olası grafik gösterimi verilmiştir.



Grafik 3. U ve V kümelerinin birleşim ve kesişimleri

Bunların kapsama ve eşitliği doğrudan üyelik elemanlarının derecelerine bağlıdır, yani $\forall x \in E$ için $\mu_U(x) \leq \mu_V(x)$ ise $U \subseteq V$ olur, benzer şekilde $\mu_U(x) = \mu_V(x)$ ise $U = V$ olur. E evrensel kümesinin üzerinde tanımlı herhangi bir bulanık U kümesinin tümleyeninin üyelik fonksiyonu da $\forall x \in E, \mu_{U'}(x) = 1 - \mu_U(x)$ biçiminde tanımlanır. Grafik 1’de açık şekilde görüldüğü gibi, U bulanık kümesinin tümleyeni V bulanık kümesidir; gerçekten de $\mu_{U'}(x) = 1 - \mu_U(x)$ olur. Bulanık kümelere tanımlanan işlemler tek türden değildir. Burada tanımlananlar, mühendislik uygulamalarında en sık kullanılan işlemlerdir.

Klasik kümeler kuramından bilinen küme işlemlerinin özellikleri, iki özellik dışında, bulanık kümeler için de geçerlidir. Klasik kümeler için sağlanan $U \cup U' = E$ ve $U \cap U' = \emptyset$ bu iki özellik bulanık küme kuramının en önemli ayırt edici özelliğini ortaya koyarlar ve bulanık kümeler için geçerli değildir. Çünkü, her ne kadar üyelik değerleri olasılıkla olduğu gibi $[0,1]$ aralığında değer alsada bir bulanık kümenin elemanlarının üyelik dereceleri toplamı olasılıkla olduğu gibi bu aralıkta bulunma zorunluluğu yoktur. Hatta bir kümenin bu eşitliklerden ne kadar saptığı bulanıklığının ölçüsüdür.

Dikkat edilirse, standart işlemlerin üyelik derecelerinin alacağı değerler $[0,1]$ değerlerine kısıtlandığı takdirde klasik küme işlevi görürler. Gerçekten, E evrensel kümesinde herhangi bir klasik A kümesini

$$A = \{x, \chi_A(x) : x \in E, \chi_A(x) \in \{0,1\}\} \quad (2)$$

biçiminde tanımlayabiliriz. Bu (2) tanımına göre bütün bulanık küme işlemleri klasik kümeler için de geçerli olurlar.

Fen bilimlerinden sosyal bilimlere, uygulamaları sayesinde son zamanlarda adından çok söz ettiren bulanık kümeler, doğal dildeki belirsiz ve bulanık kavramları temsil etmemizi ve onları matematiksel olarak ifade etmemizi mümkün kıyorlar. Uygulama alanlarının genişliği ve bu alanlarda oluşturduğu sonuçların etkisi bakımından bulanık küme kuramı bugün bilimsel çalışmalarda önemli bir yer tutuyor. Bulanık kümeler, bulanık mantık kavramlarını uygulama algoritmalarına dönüştüren önemli araçlardır. Bulanık mantık algoritmasının kullanımı, makinelere belirli bulanık kavramları anlama ve buna yanıt verme olanağı sağladığından, bulanık mantığın önemli hedeflerinden biri, kullanıldığı makinelerin insan gibi düşüncesini sağlamaya çalışmaktır.

Naim Çağman,
ncağman@gop.edu.tr

Gaziosmanpaşa Üniv., Fen Ed. Fak., Mat. Böl.,

Kaynaklar

- [1] Dubois, D. and Prade, H. Fuzzy Sets and Systems: Theory and Applications, Academic Press, New York. 1980.
- [2] Elmas, Ç., Bulanık Mantık Denetleyiciler, Seçkin, Ankara, 2003.
- [3] İbrahim, A., Gümüli Sistemlerle Bulanık Mantık (Çeviri: N. Çervatoğlu), Bileşim Yayınevi, İstanbul, 2004.
- [4] Klir, J. G. and Folger, T. A., Fuzzy Sets, And Information, New Jersey, 1988.
- [5] Şen, Z., Bulanık Mantık ve Modelleme İkeleri, Bilge Kültür Sanat, İstanbul, 2001.
- [6] Şen, Z., Modern Mantık, Bilge Kültür Sanat, İstanbul, 2003.
- [7] Zimmermann, H.J., Fuzzy Set Theory and Its Applications, Kluwer, 1991.