SONSUZ TOPLAMLAR

Varsayalım ki bugün sizin için uzun ve yorucu bir gündü, neyse ki bitti. Bir parça dinlenebilmek için koltuğunuza şöyle bir oturdunuz. Ne kadar yorulmuş olduğunuzu ancak o zaman gerçekten anlayabildiniz. Hem dinlenip hem de keyifli vakit geçirebilmek için elinize derginizi alıp okumaya koyuldunuz. İşte tam bu sırada kapı çaldı. Bulunduğunuz noktaya yaklaşık 10 metre uzaklıkta bulunan kapıya gidip onu açmak o an için yeryüzündeki en zor iş olsa gerek.

Genelde pratik düşünmekten yana olan beyniniz bu sefer tam aksine, içinizdeki üşenme dürtüsünün baskısıyla olsa gerek, ortaya teorik düşünceler atmaya başladı:

"Varsayalım ki kapıyı açmak üzere yerimden kalktım ve ilk hamlemi yaparak 10 metrelik yolun yarısını gittim. Daha sonra geriye kalan 5 metrelik yolun da yarısını gittim ve geriye 2,5 metrelik yolum kaldı. Bu yolun da yarısını gitmeyi başarsam bile geriye her zaman bir miktar yolum kalacak ve kalan yolu asla sıfırlayamayacağım. Sonuç olarak kapıya ulaşmam mümkün değil, yerimden kalkmama gerek yok!"

Tam noktayı koymuştunuz ki açlık hissiniz, üşenme dürtünüzü bastırmaya başladı. Kapıya gelenin size yemek getiren iyi bir arkadaşınız olabileceği düşüncesine kapıldınız. Ama beyniniz az önce kendi kendini kandırmak için oynadığı oyuna o kadar inandı ki geri adım atmanın yolunu bulmak kolay olmadı:

"Varsayalım ki yanlış hesaplama sonucu aslında 10m olan kapı ile aramdaki mesafenin 20m olduğunu düşündüm. O zaman ilk hamlede yolun yarısını yani 10m yolu gider kapıya tek hamlede varırım!"

İşte şimdi kapıya varacağınıza ikna oldunuz ve gerçekten de oturduğunuz yerden kalkıp kapıya gittiniz. Açıp baktınız ki kimsecikler yok. Siz düşünürken kapıdaki misafir gitmiş olmalı! Bu durumun suçlusu matematik mi dersiniz?

Zenon'un Meşhur Paradoksu

Zenon'a göre teorikte, az önce anlatılan örnekte olduğu gibi, koltuktan kapıya gitmek imkansızdır. Hatta hareket etmek imkansızdır çünkü kapıya gidecek kişi önce ilk 5 metreyi gitmeli ve bu 5 metreyi gidebilmek için önce onun yarısı olan 2,5 metreyi gitmeli ve beklendiği üzere bu 2,5 metrelik yolu da gidebilmesi için önce onun yarısını gitmeli. Kısacası, bırakın yolu tamamlamayı, bulunduğu yerden bir arpa boyu ileri gitmesi bile imkansızdır ve bu nedenle hareket imkansızdır. M.Ö. 450'lerde yaşamış olan Zenon'un, 40 tane paradokstan bahsettiği kitabı günümüze kadar ulaşmış olmasa bile pek çok farklı kaynak sayesinde onun hakkında bilgi edinebiliyoruz. Bu 40 paradokstan süreklilik ve sonsuzla ilgili olan 4'ü (2 tanesini henüz açıkladık), matematik açısından oldukça önemli çünkü bunlar 17. yüzyılda Newton ve Leibniz'in birbirlerinden bağımsız olarak keşfettikleri sonsuz küçükler hesabının tarihsel gelişimindeki ilk basamak.

Bir Hata Olmalı

Anlattıkları korkunç derecede ikna edici olan Zenon'un bir yerlerde hata yaptığına inanmak için oldukça geçerli sebeplerimiz var. Her şeyden önce biliyoruz ki hareket etmek imkansız değil (tabii ortada bir sağlık problemi olmadığı sürece). Bir yerlerde bir hata olduğu açık! Ya biz yanlış biliyoruz ya da Zenon, bir yerlerde yanlış olduğunu hiç kimsenin fark edemediği bir bilgiyi doğru kabul ediyor.

Sonsuz Toplam

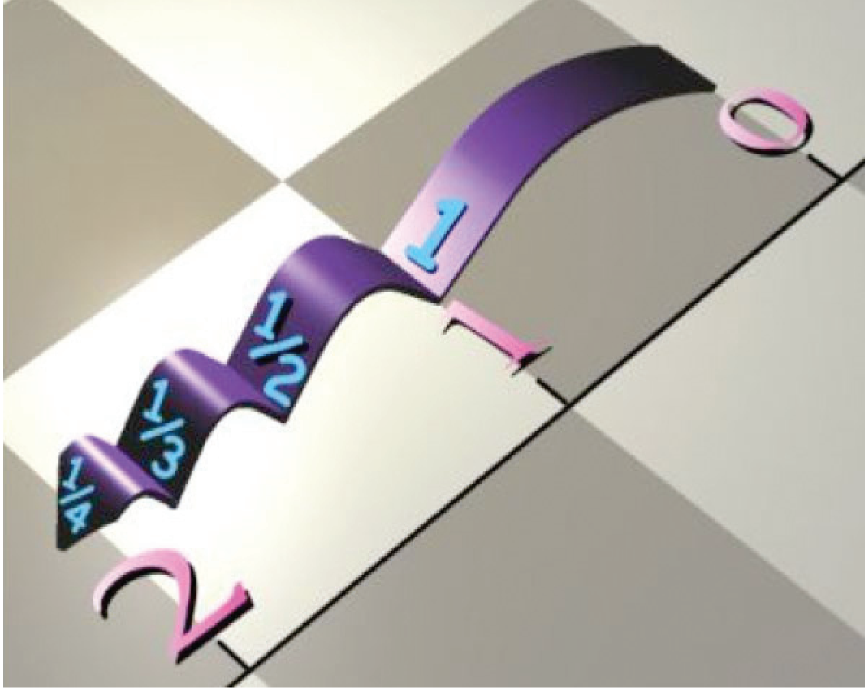
Kapıya ulaşamama hikayesine dönelim. Alabileceğimiz yolu bulabilmek için şu sonsuz toplamı hesaplamak gerekir.

$$(5 + 2{,}5 + 1{,}25 + 0{,}625...) = (\frac{10}{2} + \frac{10}{4} + \frac{10}{8} + \frac{10}{16}...)$$

$$= 10 \cdot (\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16}...)$$

Zenonun düşüncesine göre, sonsuz sayının toplanmasını gerektiren $10 \cdot (\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16}...)$ ifadesi sonsuz bir uzunluk verir.

Teoride bu hesap yapılamaz ama pratikte sonuç 10'dur yani teori ile pratik arasında bir uçurum mevcuttur, bu da paradoksun çıkış noktasıdır. Oysa ki bu sonsuz tane sayıyı topladığımızda gerçekten de '10' gibi sonlu, elle tutulur gerçel bir sayı elde ediyoruz. Ama Zenon, sonsuz tane pozitif sayıyı toplayınca sayının sürekli büyüyeceğini ve bir gerçel sayının elde edilmesinin mümkün olmayacağını düşündüğünden bu kabulün yanlışlığından hiç şüphelenmemiş. Kabul etmek gerekir ki, Zenon'un tezinin çeldiricilik düzeyi oldukça yüksek.



Sonsuz Diziler ve Sonsuz Toplamlar

Sonsuz bir dizi doğal sayılardan gerçel sayılara tanımlanmış bir fonksiyondur. Örneğin;

$1 \to \frac{1}{2}; 2 \to \frac{1}{4}; 3 \to \frac{1}{8}; \ldots$

Bu dizide her n doğal sayısının $\left(\frac{1}{2^n}\right)$ gerçel sayısına gittiği açıkça görülüyor. Dizi $(a_n) = \left(\frac{1}{2^n}\right) = (\frac{1}{2^1}, \frac{1}{2^2}, \frac{1}{2^3}, \ldots)$ şeklinde ifade edilir ve virgülle ayrılmış her gerçel sayıya dizinin bir terimi denir. Sonsuz toplam da böyle bir sonsuz dizinin terimlerinin birbiriyle toplanmasıyla elde edilen sonuçtur:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = \frac{1}{2^1} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \ldots$$

Matematiğin özellikle 17. yüzyıldan sonra derin bir şekilde yoğunlaştığı ve cevaplar bulabildiği bu tür hesapların 2200 yıl önce yaşayanlar tarafından anlaşılmamasına şaşırmamak gerekir, çünkü o zamanlar henüz limit kavramının bulunmasına yüzyıllar vardı.

Sonsuz Tane Sayı Nasıl Toplanır

Sonsuz tane sayıyı toplamak çok zor değil ama toplamaya geçmeden önce yapılması gereken önemli bir işlem var: serinin yakınsak mı yoksa ıraksak mı olduğuna karar vermek, ya da diğer bir değişle sonucun bir gerçel sayı olup olmadığını belirlemek.

Örneğin şu serinin sonsuza ıraksadığı gayet açık:

$$\sum_{n=1}^{\infty} n = 1 + 2 + 3 + 4 \ldots$$

Sürekli büyüdüğü size açık gelmediyse, bir de şu yolu deneyin: Serinin kısmi toplamının, yani 1'den k'ya kadar olan toplamının, k sonsuza giderken limitine bakın. Bu toplam formülünü geçen yazımızdan hatırlayacaksınız:

$$\lim_{k \to \infty} \sum_{n=1}^{k} n = \lim_{k \to \infty} \frac{k(k+1)}{2}$$

Şimdi sonucun sonsuza ıraksadığı daha net, yani seri ıraksak.

Yazımızın başından beri bahsettiğimiz $\left(\frac{1}{2^n}\right)$ geometrik dizisinin kısmi toplamını hesaplamak güzel bir örnek teşkil edebilir:

$$S_k = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \ldots + \frac{1}{2^k}$$

$$\frac{1}{2} \cdot S_k = (\frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \ldots + \frac{1}{2^k}) + \frac{1}{2^{k+1}}$$

$$\frac{1}{2} S_k = (S_k - \frac{1}{2}) + \frac{1}{2^{k+1}} \Rightarrow S_k = 1 - \frac{1}{2^k}$$

Bu ifadenin limiti de 1'e gider. Yani 1 metrelik yolun önce yarısını, sonra kalanın yarısını ... giderseniz gerçekten de 1 metrelik yolu tamamlarsınız çünkü bu sonsuz toplam 1'e eşittir. Bu sayede teoriyle pratik arasında yüzyıllardır süregelen uçurumu nihayet ortadan kalkmış olur.

Kısmi toplam bulmak her zaman bu kadar kolay değildir işte bu nedenle karşımıza çıkan her seri için ıraksaktır, yakınsaktır ya da yakınsaksa toplamı şudur demek kolay değil. Yakınsaklığı anlamak için pek çok test geliştirilmiş. Bu testleri kullanarak bir serinin yakınsak olduğu kolayca belirlenebiliyor. Hiçbir teste uymayan seriler de var. Hala yakınsak mı ıraksak mı olduğu belirlenemeyen şu seri gibi:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\left(\frac{2}{3} + \frac{1}{3}\sin n\right)^n}{n}$$

Riemann-Zeta Fonksiyonu

Bir serinin yakınsak olduğu belirlense bile toplamın kaç olduğunun bulunması uzun zaman alabiliyor. Bu uğurda verebileceğimiz en ünlü örnek:

$$\varsigma(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$$

Bizim genelde bildiğimiz fonksiyonlar $f(x)$ şeklinde yani fonksiyonun 'f' siyle ifade edilir. Bu fonksiyonsa adını, ifade edildiği zeta (ς) harfinden ve 1859 yılında bu fonksiyonla ilgili çok önemli bir hipotezi, Riemann Hipotezini, ortaya atan sahibi Bernhard Riemann'dan almış. Zaman içinde s'nin hangi sayı değerleri için fonksiyonun yakınsak ya da ıraksak olduğu bulunmuş. Söz gelimi s=1 için seri ıraksak ve s'in 1'den büyük tüm değerleri için seri yakınsak. Ama yakınsak olduğunun bulunmuş olması bu fonksiyonun mevcut sorunlarını çözmeye yetmiyor, herbir s değeri için bu sonsuz toplamın bir de cevabını hesaplamak gerekiyor. Örneğin $\varsigma(2) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ serisinin eşitliğinin $\frac{\pi^2}{6}$ olduğu Leonhard Euler tarafından bulunmuş. Hatta s'nin tüm çift değerleri için toplamı hesaplama yöntemi biliniyor ama tek değerlerin durumu pek içaçıcı değil. Euler'den bu yana kaydedilen tek ilerleme $\varsigma(3) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3}$ serisinin irrasyonel bir sonuç verdiği (Roger Apery,1977). Bunun dışında şimdiye kadar elde edilmiş başka bir gelişme yok. Sadece hesap makinası ile elde edilmiş sonuçlar ve o sonuçalara bağlı yürütülen tahminler. Belki de matematik bu soruları cevaplamak için hala ortaya çıkmamış yeni kuramları ya da π ve e gibi yeni irrasyonel sayıları bulmayı beklemektedir ve insanlığın bu sonuçlara ulaşması için birkaç yüzyıl daha uğraşması gerekmektedir.

Nilüfer Karadağ

Kaynakça:
http://plus.maths.org/issue19/features/infseries/checker.jpg
Eric W. Weisstein. "Harmonic Series." From MathWorld–A Wolfram Web Resource. http://mathworld.wolfram.com/HarmonicSeries.html

Bir Buluşum Var

Merhaba;

Öncelikle böyle önemli ve değerli bir dergide bizlere yer ayırdığınız için teşekkür ederim. Ben Aksu Anadolu Öğretmen Lisesi I. Sınıf öğrencisiyim. Bilim ve Teknik dergisini ve Tübitak yayınlarını imkanlarım çerçevesinde takip ediyorum. Bilime aşırı derecede ilgi duyuyorum. Bu buluşumun yanında daha birçok konuda buluşlarım ve araştırmalarım var ama ben matematik öğretmenimin de çok ilgisini çeken bu buluşumu yolluyorum. Eğer değerlendirir ve dikkate alırsanız diğerlerini de sizinle paylamak istiyorum.

Asal sayılara çok fazla ilgi duyuyorum. Bir çok asal sayı kuralı ve fonksiyonu keşfettim. Asal sayılarla bu kadar çok uğraşınca mecburen bölünebilme kurallarıyla da ilgilenmek zorunda kalıyorsunuz. Ben de 7'nin bölünebilme kuralından esinlenerek 13'ün bölünebilme kuralını buldum. Sanırım daha önceden bir bölünebilme kuralı bulunmuş ama bu, 10a+b şeklinde verilen bir sayı için a+4b ifadesi 13'ün katıysa bu sayı 13 ile bölünebilir şeklinde. Bu formülde sayı büyüdükçe a+4b ifadesinin 13'ün katı olup olmadığını anlamak çok zorlaşıyor. Benim formülümde ise basamak sayısı arttıkça çıkarma işlemleri de arttığı için, istediğiniz basamaklı bir sayının 13'e tam bölünüp bölünmediğini 2 basamaklı bir sayı ile anlayabiliyorsunuz.

Kural şu şekilde:

...khgfedcba şeklinde verilen bir sayı için;

(1c+4b+3a)-(1f+4e+3d)+(1k+4h+3g)-(...)=13k

oluyorsa bu sayı 13'e bölünür.

Örnek; 60775 sayısı için:

43143

$$(1\cdot 7+4\cdot 7+3\cdot 5)-(4\cdot 6+0\cdot 3)=50-24=26=13\cdot 2$$

öyleyse 60775 13'e tam bölünür.

Sağlaması:

60775:13=4675

İlgilendiğiniz için teşekkürler.

Burak Şalış

Burak arkadaşımıza bu çalışmasını bizlerle paylaştığı için teşekkür ediyoruz. Köşemize mektup gönderen tüm okuyucularımıza da teşekkür ediyoruz. Aldığımız pek çok mektup sayılar kuramının pratik kurallarından bahsediyor. Sayılar kuramı yüzyıllardır insanoğlunun mercek altında incelediği bir konu olduğundan temel düzeylerde yeni olgular çıkarılması çok zor. Bir problemin sizlerden önce bir başkası tarafından çözülmüş olması ya da bir kuralın daha önceden bulunmuş olması matematik yapmak konusunda hayal kırıklığı yaratmamalı. Matematik bir oyundur ve matematikçiler de bu oyunun en yetenekli ve hevesli oyuncuları. Yani anlayacağınız her matematikçi matematiği kendisi için oynar, şan, şöhret vs. kimsenin listesinde birinci sırada değildir. Bu nedenle keşfettiğiniz bir kuralın daha önce bulunmuş olmasına takılıp kalmaktansa, matematik yapmış olmanın keyfini ve tadını çıkarın.

Burak arkadaşımız sayılar kuramının en temel konularından biri olan bölünebilme kuralları üzerine bir çalışma yapmış.

Genel olarak kullanılan 13'e bölünebilme kuralı kendisinin de ifade ettiği gibi büyük sayılar için çok pratik olmaktan çıkıyor:

$b_n b_{n-1} \dots b_1$ sayısı n basamaklı bir doğal sayı olsun. Buna göre eğer sayının son basamağının silinmiş halinden bu son basamağın 9 katını çıkarınca kalan sayı yani

$b_n b_{n-1} \dots b_2 - b_1.9$, 13 ile bölünebiliyorsa başta aldığınız sayı da bölünür. Çıkan sayı 13 ile bölünebilmeyi kontrol edemeyecek kadar büyükse işlemi yineleyin.

Örneğin 1313 için

$131-9\cdot 3=104$,

104 için de aynı testi uygularız:

$10-4\cdot 9=-26$, ,

-26, 13 ün –2 katı olduğuna göre 1313 sayısı 13 ile bölünür.

Aynı kuralı son basamağın 9 katını çıkarmak yerine aynı basamağın 4 katını ekleyerek de uygulayabiliriz:

$131+4\cdot 3=143$

$14+4\cdot 3=26$

Burak arkadaşımızın verdiği (ve daha önceden de bilinen) kuralı inceleyince daha pratik olduğunu farkediyoruz. Akılda kalması daha zor olduğundan kullanımı diğer kuraldan daha az yaygın.

Bu kuralın çıkış yönteminden bahsetmek okuyuculuraımıza bölünebilme kuralları adına bir fikir verebilir:

10'luk sayma sisteminde çalışıyoruz ve bu nedenle bir abcdefg... sayısını ...g+10f+100e+1000d+10000c+100000 b+1000000a şeklinde ifade edebiliriz. Katsayıların 13 ile bölünmesinden kalanlar kolayca bulunabilir:

g 1 = 1 (mod 13)
f 10 = -3 (mod 13)
e 100 = -4 (mod 13)
d 1000 = -1 (mod 13)
c 10000 = 3 (mod 13)
b 100000 = 4 (mod 13)
a 1000000 = 1 (mod 13)

3,4,1 ve –,+ tekrarları kolayca gözlemlenebilir.

10 = -3 (mod 13) gibi bir ifade bize 10 sayısından ancak -3 sayısını çıkardığımızda 13'le tam bölünebilmenin gerçekleşebileceğini anlatır. Buna göre;

$$g-3f-4e-d+3c+4b+a-\dots$$

sayısı 13'ün katıysa sayı 13'e bölünür.

Nilüfer Karadağ
karadagnilufer@yahoo.com

Eğer siz de kaydettiğiniz önemli bir bulgu olduğunu düşünüyorsanız dergimize gönderin ve onu sizin için değerlendirelim. Adresimiz:

TÜBİTAK Bilim ve Teknik Dergisi,
Buluşumu Değerlendirin Köşesi,
Atatürk Bulvarı No:221
Kavaklıdere-ANKARA