33. ULUSLARARASI MATEMATİK OLİMPİYADI

Ülkemizden Sinan Güntürk ve Cem Mutlugün'ün üçüncülük aldığı matematik olimpiyadı sorularını dergimizin Eylül 1992 sayısında yayınlamıştık. Bu soruların çözümünü şimdi yayınlıyoruz.

SORULARIN ÇÖZÜMÜ

Albert ERKİP*, Semih KORAY*

Soru 4 :

Düzlemde, C bir çember; L, C çemberine teğet olan bir doğru ve M ise L doğrusu üstünde bir nokta olsun. Aşağıdaki koşulu sağlayan tüm P noktalarının geometrik yerini bulunuz. L doğrusu üstünde Q ve R gibi öyle iki nokta vardır ki, M, QR nin orta noktası ve C de PQR üçgeninin iç çemberi olur.

Çözüm :

Şekilde görüldüğü gibi C çemberi PQR üçgeninin içteğet çemberi olsun. C'nin L doğrusuna değme noktasını S ile gösterelim, ST′çap olacak şekilde çemberin üzerinde T′noktasını alalım ve çembere T′ noktasında teğet olan L doğrusuna paralel L′ doğrusunu çizelim. L′ doğrusunun PQ doğrusunu kesim noktası Q′, PR doğrusunu kesim noktası R′ olsun. PT′doğrusunun L doğrusunu kestiği noktayı T ile gösterelim. PQ′R′üçgeni PQR üçgenine benzerdir, C çemberi PQ′R′üçgeninin dışteğet çemberidir. Benzerlikten (ya da homoleti dönüşümünden) PQR üçgeninin dışteğet çeberi C′QR kenarına T noktasında teğet olur. PQR üçgeninde S içteğet çemberin, T ise dışeğet çemberin QR kenarına değme noktasıdır. O halde IQSI = ITRI olmalıdır.

Buna göre: "M, QR nin orta noktasıdır ancak ve ancak SM = MT" gösterilmiş olunur. Buna göre, P istenen koşulu gerçekliyorsa, PT′doğrusunun sabit bir T noktasından geçtiğini götermiş olduk. Tersine P, T′doğrusu üzerinde, şekle göre çemberin üst tarafında bir nokta ise, M, QR nin orta noktasıdır, yani P istenen koşulu sağlar.

Buna göre aranan geometrik yer sudur: S noktasının M ye göre simetriği T noktasını alalım, TT doğrusunun çemberin dışında ve T ye göre ters tarafında kalan yarı doğru.

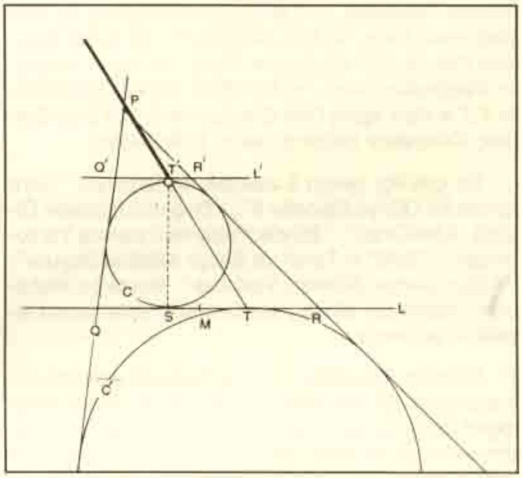
Soru 5 :

S, üç boyutlu uzayda sonlu sayıda noktadan oluşan bir küme olsun. S_x, S_y ve S_z ile S deki noktaların sırasıyla yz düzlemi, zx düzlemi ve xy düzlemi üstüne dik izdüşümlerinden oluşan kümeleri gösterelim. Bu durumda

$$|S|^2 < |S_x| \bullet |S_y| \bullet |S_z|$$

olduğunu kanıtlayınız. Burada $|A|$ ile sonlu bir A kümesindeki eleman sayısı gösterilmektedir. (Not: Bir noktanın bir düzlem üstüne dik izdüşümü, o noktadan düzleme çizilen dikmenin ayağıdır.)

Prof.Dr., ODTÜ Matematik Bölümü.



Çözüm :

5- Verilen bir S kümesini z-eksenine göre katlara ayıralım. Tüm noktaların z-koordinatlarının kümesi $\{z_1, z_2, \ldots, z_k\}$ olsun, $1 \leqslant i \leqslant k$ için $S = \{(x,y,z) \in S: z = z_i\}$, yani z-koordinatı z_i olan noktaların kümesi olsun. Hemen görüleceği gibi:

$$|S| = \sum_{i=1}^{k} |S^i|, \quad |S_x| = \sum_{i=1}^{k} |S^i_x|, \quad |S_y| = \sum_{i=1}^{k} |S^i_y|,$$

eşitlikleri doğrudur. Öte yandan s^i tek katlı, yani düzemsel bir kümedir ve

$$|S^i| = |S^i_z|, \quad |S^i| \leqslant |S^i_x| \cdot |S^i_y|$$

bağıntıları kolayca görülür. Çarparsak, her $1 \leqslant i \leqslant k$ için

$$|S^i| \leqslant |S^i_x|^{1/2} \cdot |S^i_y|^{1/2} \cdot |S^i_z|^{1/2}.$$

Son olarak her $1 \leqslant i \leqslant k$ için $|S^i_z| \leqslant |S_z|$ olduğuna dikkat edelim. Bulduklarımızı birleştirirsek:

$$\begin{aligned}
|S|^2 &= \Big(\sum_{i=1}^{k} |S^i|\Big)^2 \\
&\leqslant \Big(\sum_{i=1}^{k} |S^i_x|^{1/2} \cdot |S^i_y|^{1/2} \cdot |S^i_z|^{1/2}\Big)^2 \\
&\leqslant |S_z| \cdot \Big(\sum_{i=1}^{k} |S^i_x|^{1/2} \cdot |S^i_y|^{1/2}\Big)^2 \\
&\leqslant |S_z| \cdot \Big(\sum_{i=1}^{k} |S^i_x|\Big) \cdot \Big(\sum_{i=1}^{k} |S^i_y|\Big)
\end{aligned}$$

$= |S_z| \cdot |S_x| \cdot |S_y|$

elde ederiz. Burada, son eşitsizlikte Cauchy-Schwartz eşitsizliğinden yararlandık.

Soru 6 :

Her n pozitif tamsayısı için S(n) sayısını aşağıdaki koşulu sağlayan en büyük tamsayı olarak tanımlıyoruz: Her $k<S(n)$ pozitif tamsayısı için n^2 sayısı k tane pozitif tam karenin toplamı olarak yazılabilir.

a) Her $n>4$ için $S(n) \leqslant n^2-14$ olduğunu kanıtlayınız.

b) $S(n) = n^2-14$ eşitliğini sağlayan bir n tamsayısı bulunuz.

c) $S(n) = n^2-14$ eşitliğini sağlayan sonsuz sayıda n tamsayısı bulunduğunu kanıtlayınız.

Çözüm :

a) $n^2=1^2+1^2+...+1^2$ eşitliğinden, n^2 sayısını $k=n^2$ tane pozitif tam kare toplamı şeklinde yazabiliyoruz. Tam karelerin sayısı k'yı azaltmak içir birtakım 1'leri gruplamamız gerekmektedir. 4 tane 1'i, $2^2=4$ diye gruplarsak k'yı 3 azaltmış; 9 tane 1'i $3^2=9$ diye gruplarsak k'yı 8 azaltmış oluruz. Bu şekilde tam karelerin sayısını 3,6,8,9,11,12 azaltabiliriz ama 13 azaltamayız. O halde n^2 tamsayısı, $k=n^2-13$ tane pozitif tam kare toplamı şeklinde yazılamaz, yani $S(n) \leqslant n^2-14$ olmalıdır.

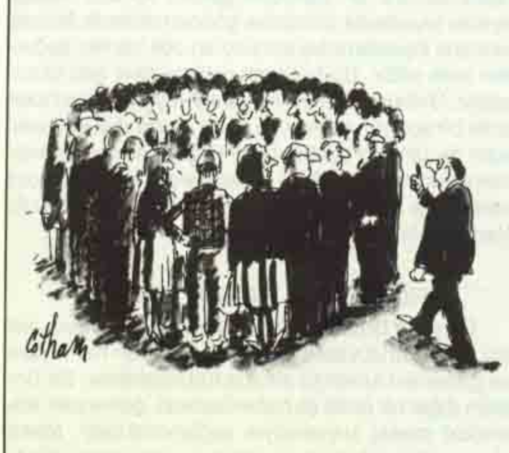
b) $n>4$ için $S(n)=n^2-14$ olması için, n^2 sayısı sırasıyla $1,2,...,n^2-14$ tam kare toplama şeklinde yazılabilmelidir. Bu ise öncelikle n'nin bir Pisagor sayısı (yani $n^2=a^2+b^2$) olmasını gerektirir ki buradan $n=5$ $(5^2=3^2+4^2)$, $n=10$ $(10^2=6^2+8^2)$, $n=13$ $(13^2=5^2+12^2)$,... olabileceğini söyler. Öte yandan $n=5$ ve $n=10$ için, n^2 (25 veya 100) üç tam karenin toplamı şeklinde ifade edilemez. $n=13$ için ise $13^2=169=3^2+4^2+12^2$ doğrudur. Devam edersek, $13^2=2^2+2^2+8^2+10^2$, $13^2=3^2+4^2+4^2+8^2+8^2$ ifadelerini buluruz; yani 13^2 sırasıyla 1,2,3,4 ve 5 pozitif tam karenin toplamı olarak yazılabilir. $S(13)=13^2-14=155$ olduğunu kanıtlamak için, $13^2=169$ sayısını 6,7,8,...,155 olduğunu kanıtlamak için, $13^2=169$ sayısını 6,7,8,...,155 tam karenin toplamı olarak ifade etmemiz gerekmektedir. Bu iş için (a)'daki irdelemeyi tersine çevirelim. n^2 sayısını k tane tam karenin toplamı şeklinde ifade ederken, bu tam karelerden biri çift, yani $(2r)^2$ şeklinde ise bu terimi $r^2+r^2+r^2+r^2$ diye ayırarak n^2 sayısını $k+3$ tam karenin toplamı olarak da ifade edebiliriz. Bu son ifadede başka çift sayı varsa (veya r çift ise) bu işlemi sürdürebiliriz. $13^2=3^2+4^2+4^2+8^2+8^2$ ifadesinde bu işlemi 53 kez tekrrarlayarak; her $1 \leqslant t \leqslant 53$ için $13^2=169$ sayısını $k=2+3t$ tam karenin toplamı olarak yazabiliriz. (İlk olarak, $13^2=3^2+2^2+2^2+2^2+2^2+4^2+8^2+8^2$, $t=2$ için $k=8$,..., son olarak $13^2=3^2+1^2+...1^2$, $k=161$ aslında istediğimizden de fazla).

Bu yukarıdaki gösterimlerin herbirinde 3^2 terimi var. $3^2=2^2+2^2+1^2$ parçalanmasıyla, terim sayısını 2 artırabiliriz, yani 13^2 sayısını her $1 \leqslant t \leqslant 53$ için $2+2+3t=4+3t$ tam kare toplamı şeklinde ifade edebiliriz.

İlk $(2r)^2=r^2+r^2+r^2+r^2$ yöntemini $13^2 = 12^2+4^2+3^2$ ifadesine 50 kez uygulayabiliriz, buradan da her $1 \leqslant t \leqslant 51$ için 13^2 sayısını $k=3t$ tam kare toplamı şeklinde yazabileceğimiz çıkar.

Bulgularımızdan, 13^2 tam sayısını sırayla 1,2,...,154 ve 155 tam kare toplamı şeklinde yazabildiğimiz, yani $S(13) \geqslant 155$ eşitsizliği elde edilir. (a)'dan $S(13) \leqslant 169-14=155$ ise $S(13)=155$'i gerektirir.

c) n tam sayısı için $S(n)=n^2-14$ olsun. $n^2=a^2+b^2+...$ gösterimi varsa buradan $(2n)^2=(2a)^2+(2b)^2+...$ gösterimini elde ederiz, yani $(2n)^2$ tam sayısı sırasıyla $1,2,...,n^2-14$ tam kare toplamı olarak ifade edilebilir. Öte yandan (b)'deki yolla bu $(2a)^2$ çift kareleri $a^2+a^2+a^2+a^2$ şeklinde ayırarak $(2n)^2$ yi sırasıyla n^2-13, n^2-12,..., $4n^2-28$ tam karenin toplamı olarak ifade ederiz. Son olarak $5^2=3^2+4^2$ ve $3^2+3^2=1^2+1^2+4^2$ ayrıştırmalarıyla $(2n)^2$ sırasıyla $4n^2-27$, $4n^2-26$,..., $4n^2-15$ ve $4n^2-14$ tam kare toplamı ifade edilir. O halde bir n için $S(n)=n^2-14$ ise $S(2n)=(2n)^2-14$ olduğunu gösterdik. O halde $n=13$'ten başlayarak $n=26$, $n=52$,... sonsuz sayıda tamsayı için $S(n)=n^2-14$ olduğunu göstermiş olduk.



Ben TV dizisinde doktorum. Belki size yardımcı olabilirim.