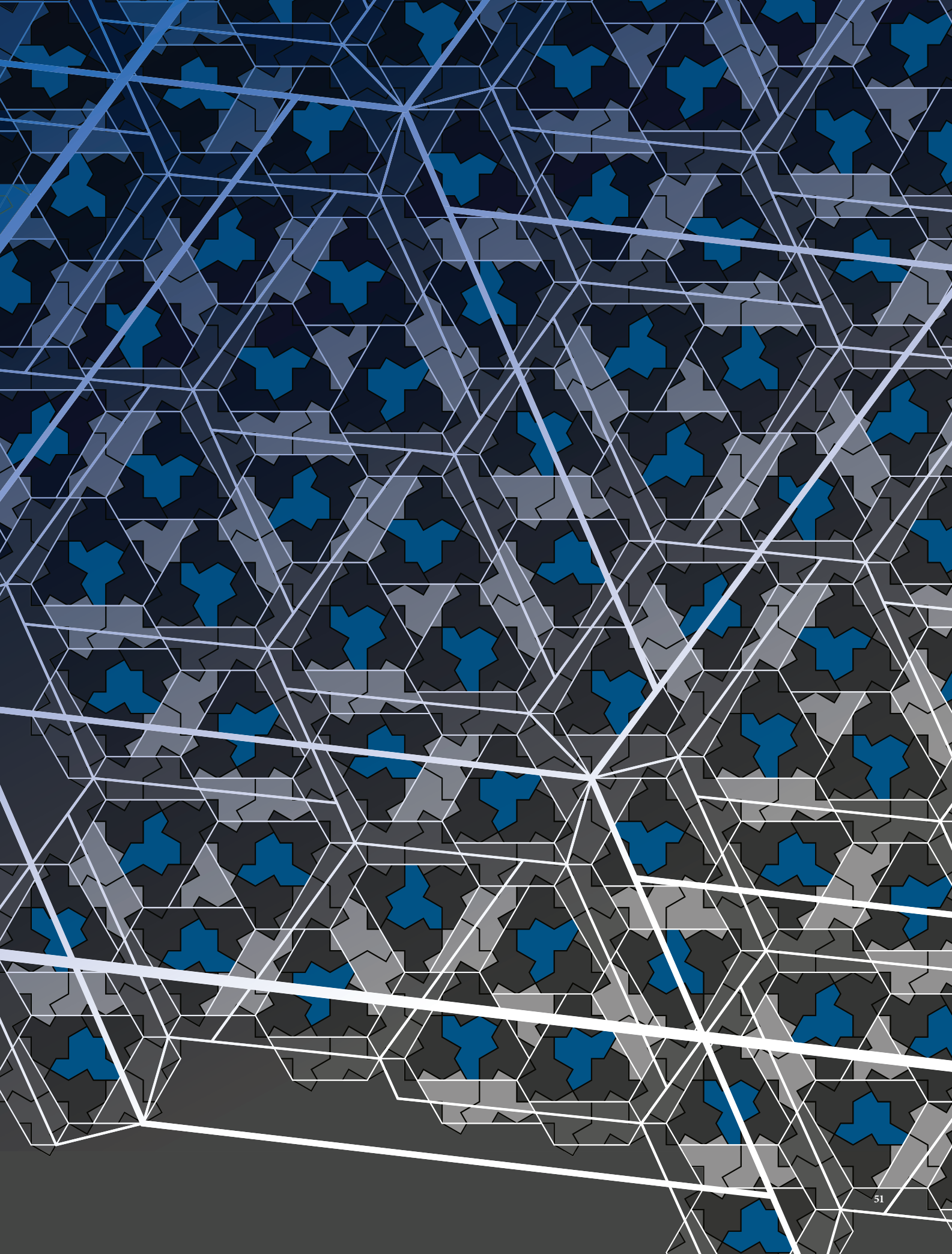


Amatör Bir Şekil Meraklısı Tarafından İlk “Einstein” Karosu Keşfedildi

İlay Çelik Sezer [TÜBİTAK Bilim ve Teknik Dergisi

Matematikte pek çok keşif, alanında yetkin ve tecrübeli bilim insanları tarafından yapılırken kimi keşifler de beklenmedik birilerinden, örneğin bir öğrenci ya da amatör bir meraklıdan gelebiliyor. Bu durumun bir örneği, ilk “einstein” karosunun geçtiğimiz yılın Kasım ayında emekli bir baskı teknisyeni tarafından keşfedilmesiyle yaşandı. Matematikçilerin neredeyse 50 yıldır aramakta olduğu einstein karoları, şimdiye kadar sadece var olması gerektiği kuramsal olarak tahmin edilen yapıları. Bütün bir düzlemi boşluksuz olarak kaplarken hiçbir şekilde kendini tekrar etmeyen bir desen oluşturan iki boyutlu özel geometrik şekiller einstein karosu olarak adlandırılıyor.



Keşfedilen einstein karosunun sahip olduğu 13 kenarlı şekle “şapka” adı verildi. Einstein adı ünlü fizikçi Albert Einstein’ı çağırırsa da aslında konu bağlamında tek karoyu temsilen, Almanca’da “bir taş” anlamına gelen “ein Stein” tamlamasından geliyor. Einstein karosu düzenle düzensizlik arasındaki bir çeşit eşikte yer alıyor. Bu karolar birbirleriyle bir bulmacanın parçaları gibi kusursuz biçimde bitişerek sonsuz bir düzlemi kaplayabiliyor ancak bunu tekrarsız şekilde yapıyorlar, yani kapladıkları düzlemde hiçbir şekilde periyodik bir desen oluşturmuyorlar.

Bir kaplamada periyodik bir desen olduğunda karoların belirli bir kısmı başka bir kısmın üstüne birer birer örtülecek şekilde oturtulabiliyor. Örneğin bir satranç tahtasında sıraları iki yana kaydırduğunuzda satranç tahtasının deseni tamamen aynı şekilde görünmeye devam eder. Tek bir şekli olan başka tür karolar da periyodik olmayan desenler şeklinde düzenlenebiliyor ancak şapka adı verilen einstein karosunun özelliği periyodik bir desen oluşturmaya imkân vermemesi.

Keşfin Sahibi Şekillere Meraklı Emekli Bir Teknisyen

Yapbozlara, fraktallere (farklı ölçeklerle büyütüldüğünde benzer ya da aynı şekilde görünen geometrik şekiller) ve yol haritalarına meraklı emekli bir baskı teknisyeni olan David Smith; ses getiren keşfi yaptığı sıralar en sevdiği şeyle ilgileniyor, şekillerle uğraşıyordu. Polyform Puzzle Solver adlı bir yazılım paketini kullanarak sıradan görünen ve şekli şapkayı andıran bir karo oluşturdu. Sonra da bu karonun

kopyalarıyla, boşluklar ve üst üste örtüşmeler olmadan ekranın ne kadarını kaplayabileceğini test etmeye koyuldu. Smith bir karo oluşturduğunda karonun kopyaları genellikle ya tekrarlı bir desen oluşturur ya da ekranı boşluk bırakmadan veya birbirleriyle örtüşmeden kaplamayı başaramazdı. Ancak şapka karosu için her iki durum da geçersiz görünüyordu. Yani şapka karoları tekrarlı bir desen oluşturmadan ekranı kaplamayı başarıyordu. Smith, bu şekli kullanarak 30 tane karton karo oluşturdu ve bunları bir masanın üstünde bir araya



getirdi. Sonra aynısından 30 karo daha oluşturup devam edince daha önce görmediği türde bir karo döşemesiyle karşı karşıya olduğunu fark etti ve şapkanın özel bir şekil olduğunu düşündü. Bunun üzerine karosunun özelliklerini Kanada'daki Waterloo Üniversitesinde tanıdığı bir bilgisayar bilimci olan Craig Kaplan'a anlattı. Kaplan hemen bu karonun özelliklerini incelemeye başladı.

Sonunda 20 Mart'ta Smith, Kaplan ve iki başka araştırmacı ile birlikte bir makale yayımlayarak şapka karosunun matematikçilerin elli yıldan fazladır aramakta

Fotoğrafta elinde 13 kenarlı şapka karolarıyla görülen Prof. Craig S. Kaplan'ın ilgi alanları disiplinler arası geniş bir konu yelpazesine yayılıyor. Özellikle odağındaki konulardan biri ise matematik ve sanat arasındaki etkileşimler. Kaplan matematiksel fikirleri kullanarak sanatçıların ve tasarımcıların kullanabileceği, dekoratif desenler oluşturan araçlar ve algoritmalar üretiyor. Kaplan'ın çalışmaları bilgisayar grafikleri, klasik ve hesaplamalı geometri, insan-bilgisayar etkileşimi, çizge kuramı, simetri ve döşeme kuramı ve algısal psikoloji gibi alanlardan bilgileri harmanlıyor.

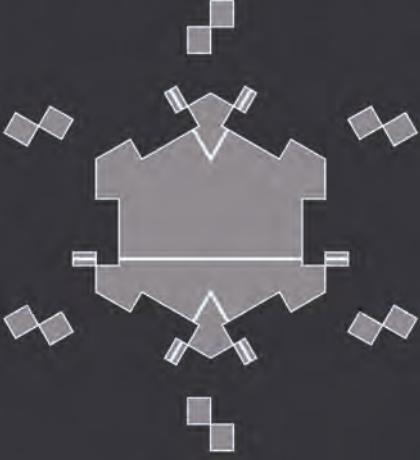
olduğu bir yapı olduğunu duyurdu: kopyaları bütün bir düzlemi doldurabilen ancak bunu yaparken hiçbir şekilde tekrar eden desenler oluşturmayan tek bir karo. Matematikçiler bu tür karoları ya da karo kümelerini "aperiyodik" olarak niteliyor. Oysa örneğin kare ya da çokgen gibi şekiller düzlemi tekrarlı (periyodik) biçimde kaplıyor.

Makalede şapkanın "periyodik düzeni tüm ölçeklerde bozulmaya zorlamak için yeterli karmaşıklığa sahip olduğunu" belirten araştırmacılar, ayrıca şapkanın bu türden sonsuz sayıdaki farklı karodan yalnızca biri olduğunu fark etti.

1960'larda Robert Berger adlı matematikçi düzlemi aperiyodik olarak kaplayan, toplam 20.426 farklı karodan meydana gelen bir küme oluşturmuştu. O zamandan bu yana matematikçiler şapkanın özelliklerine sahip tek bir karonun arayışındaydı. Berger'in çalışması daha küçük aperiyodik karo kümeleri oluşturmaya yönelik bir yarış başlatmıştı ve nihayet 1970'te Roger Penrose sadece iki aperiyodik karo içeren bir küme keşfetmeyi başarmıştı. 1982'de Dan Shechtman adlı malzeme bilimci, Penrose'un karo döşemelerine benzer simetritenin doğada kuazikristal adlı yapılarda bulunduğunu

keşfetti ve bu konudaki araştırmaları sayesinde 2011'de Nobel Kimya Ödülü'ne layık görüldü.

O zamandan beri de matematikçiler iki boyutlu düzlemi boşluksuz, üst üste çakışmaksızın ve aperiyodik olarak kaplayabilen tek bir karonun arayışı içindeydi. Tek bir karo arayışına istinaden Ludwig Danzer adlı Alman geometrici, aranan özel karoya şakayla karışık Almanca "bir taş" anlamındaki "einstein" terimini atfetti. 1990'lı yıllarda iki araştırma grubu 10 kenarlı tek bir karonun bitişik kopyalarını üst üste bindirerek düzlemi aperiyodik olarak kaplamayı başardı. Yaklaşık on yıl sonra da Tazmanya'dan Joan Taylor adlı bir amatör, birbirinden ayrı hâlde birden çok parçası olan bir şekil keşfetti. Taylor ile Duke Üniversitesinden fizikçi Joshua Socolar, 2010'da yayımladıkları bir makaleyle şeklin düzlemi aperiyodik olarak kaplayabildiğini gösterdiler. Son olarak da geçtiğimiz yıl İleri Araştırmalar Enstitüsü'nden Rachel Greenfeld ile University of California, Los Angeles'tan Terence Tao, döndürülmesine ve yansıtılmasına bile gerek olmadan uzayı kaplayabilen çok boyutlu bir şekil keşfetti.



Taylor-Socolar karoları, hiçbir zaman kendini tekrar etmeyen bir desen oluşturan tek bir karo olarak bir einstein karosuna en çok yaklaşan şekildi. Ancak bu karolar şekilde görüldüğü gibi birbirinden kopuk parçalardan oluşuyordu. Bu da aslında karo kavramının esnetilmiş bir versiyonu sayılırdı.

Ancak Smith'in keşfine kadar hiç kimse gerçek bir "einstein" karosu bulmayı başaramamıştı. Öyle ki emekli bir profesör ve geometrik döşemeler alanında araştırmacı olan Marjorie Senechal'in ifadesiyle, matematikçiler bu

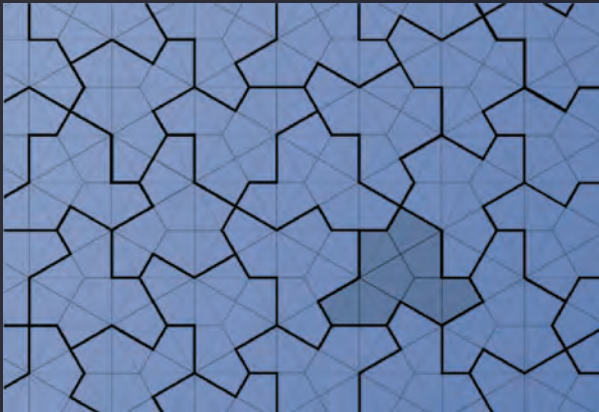
tür bir karonun gerçekten var olup olmadığına artık şüphe ile yaklaşıyordu. Senechal, Smith'in şapkası kadar basit bir şeklin bir einstein karosu olmasını akıllara durgunluk verici bir durum olarak niteliyor. Senechal bir einstein karosunun şimdiye kadar keşfedilememiş olmasını, matematikçilerin periyodik döşemelerde görülmesi mümkün olmayan "yasaklı" simetrilere dâhil şekillere odaklanmasına bağlıyor. Örneğin Penrose'un döşemeleri, beşgenlerdeki ve beş noktalı yıldızlardaki gibi beşli simetrilere sahiptir. Normal beşgenler düzlemi kaplayamadığından, beşli simetriler aperiodyk döşemeler aramak için doğal bir mecra olarak görülmüş olabilir.

Buna karşılık şapka hiçbir simetri taşımadığı gibi araştırmacıların makaledeki ifadesiyle "alelade bir basitliğe sahip". Bu karo döşemesinin sahip olduğu

önemli bir özellik ise bir çeşit periyodik döşemeye karşılık gelen altıgenli bal peteği örüntüsüyle derin bir ilişki içinde olması. Bir altıgen döşemesinden şapka döşemesi elde etmek için önce altıgenlerin karşılıklı kenarlarının orta noktaları birleştiriliyor. Bu her bir altıgeni altı "uçurtma"ya bölüyor. Her bir şapka da komşu altıgenlerden eşleştirilen birbirine bitişik sekiz uçurtmadan oluşuyor. Senechal'e göre şapka karosu, periyodik ve aperiodyk karoların matematikçilerin farkında olduğundan daha yakın şekilde ilişkili olduğunu gösteriyor.

Keşfin ilanından bu yana tüm dünyadan matematikçiler ve geometrik döşeme meraklısı amatörler bu yeni karolarla uğraşmaya başladı. Karonun kâğıttan kalıplarını çıkaranlar, üç boyutlu yazıcı ile şapka karosu üretenler, şapka biçimli örtüler ve kurabiyeler üretenler bunlardan bazıları. Smith şapka karosunun neden olduğu bu heyecan dalgasının pek alışık olmadığı ve kendisine biraz da gerçek üstü gelen bir durum olduğunu söylüyor. Öte yandan Smith'in keşfi döşeme geometrisinde bir hobi meraklısının yaptığı ilk çığır açıcı keşif sayılmaz. 1970'lerde bir postacı olan

Şapka karosu (birisi koyu renkle vurgulanmış olan) sekiz küçük uçurtma şeklinden (koyu gri çizgilerle vurgulanan) oluşan bir çokgen.



Metakarolardan Süperkarolara Hiyerarşik Yaklaşım

Robert Ammann, Penrose'un döşemelerinin bir kümesini bağımsız olarak keşfetmişti. California'dan bir ev hanımı olan Marjorie Rice 1975'te yeni bir beşgen döşemesi ailesi bulmuştu. Yine daha önce sözü geçen Joan Taylor da Socolar-Taylor döşemesini keşfetmişti. Senechal'e göre belki de matematikçiler gibi bu tür keşiflerin ne kadar zor olduğunu bilmenin getirdiği psikolojik yüke maruz kalmadıkları için hobi meraklılarının keşif yapmaları kolaylaşıyor olabilir.

İki Yaklaşımlı İspat

Smith ve birlikte çalıştığı üç bilim insanı şapkanın bir "einstein" kerosu olduğunu iki yolla ispatladı. Biri, şapkaların kendilerini metakarolar denen daha geniş kümeler biçiminde düzenlediğine ilişkin gözleme dayanıyordu. Daha sonra bu metakarolar daha geniş kümeler olan süperkarolar şeklinde bir düzen alıyor ve bu sonsuza kadar devam ediyordu. Bu durum periyodik olmayan karo döşemelerinde yaygın olan türden bir hiyerarşik içinde gerçekleşiyordu. Bu yaklaşım şapka döşemesinin sonsuz bir düzlemi tamamen kaplayabildiğini ve oluşan desenin kendini tekrarlamadığını ortaya koydu.

Şapka kerosunun aperiodyk olduğunun ispatı, geçmişi 1960'lara kadar uzanan, döngüsel bir şekilde giderek daha büyük yapılar oluşturma biçimindeki tekniğe dayanıyor.

Metakarolar

H



T



P



F

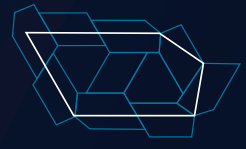
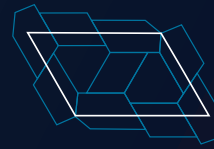


Şapka Kerosu

Sadece şapka kerosu kullanılarak dört metakaro (H, T, P ve F adlı) oluşturulur.

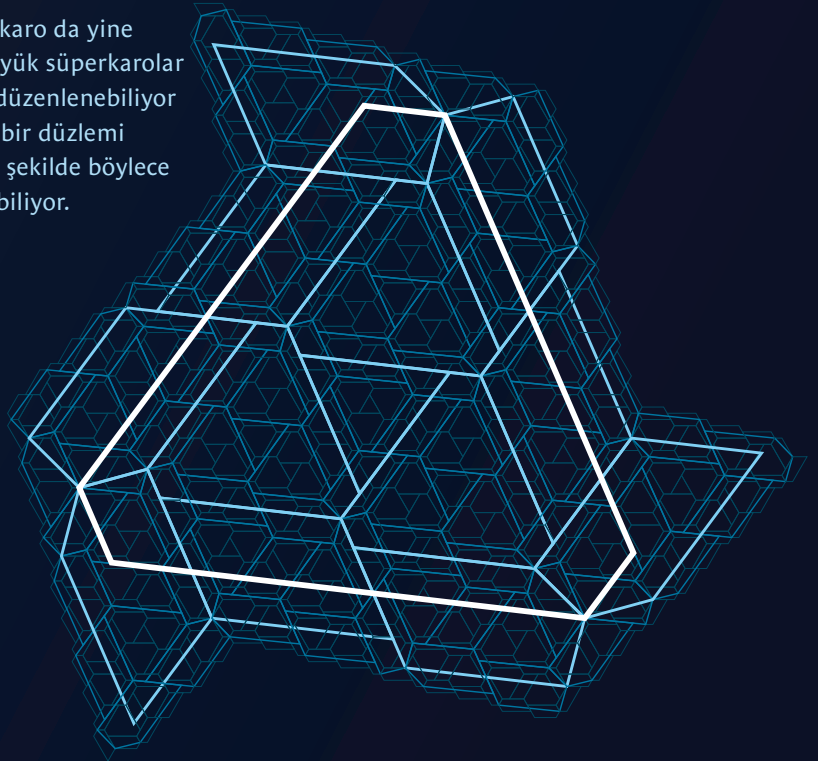
Süperkarolar

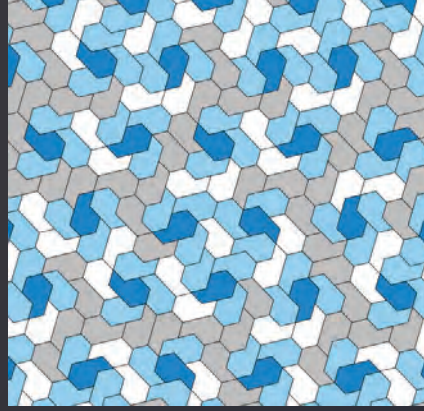
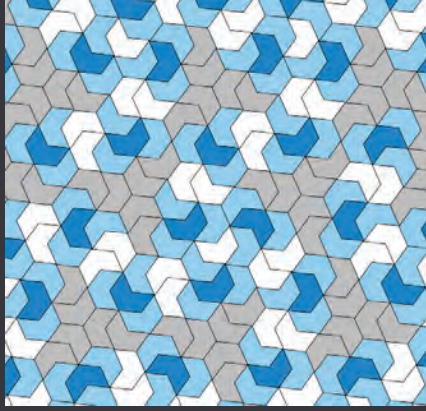
Metakarolar kendilerinin daha da büyük versiyonlarını oluşturacak şekilde bir araya getirilebilir.



Dört Döngüsel Tekrar

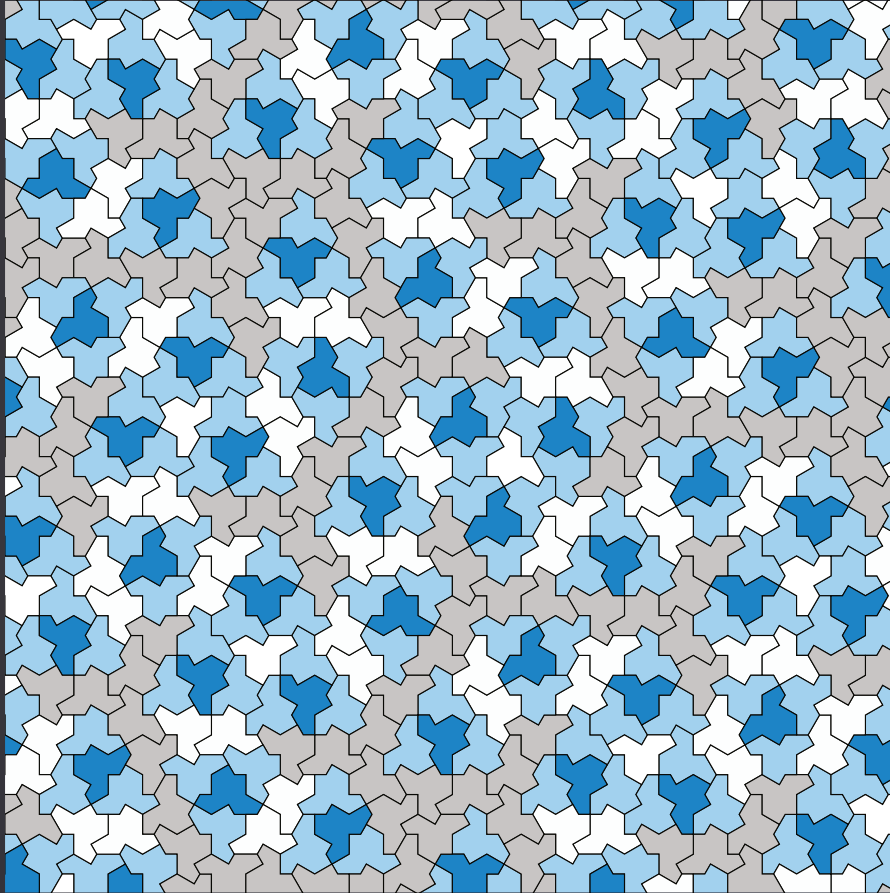
Dört süperkaro da yine daha da büyük süperkarolar biçiminde düzenlenebiliyor ve bu, tüm bir düzlemi dolduracak şekilde böylece devam edebiliyor.





Araştırmacılar şapka karosunun kenar uzunlukları aşamalı olarak değiştirilerek elde edilen şekil ailesinin iki aşırı ucundaki (birinin şekli “V” harfini (solda), diğerininki bir kuyruklu yıldız andıran (sağda)) iki üyesi ile uzun ve kısa kenarların birbirine eşitlendiği tam ortadaki üye hariç ailedeki tüm üyelerin aperiyojik olduğunu kanıtlayabildi.

D. Smith Et Al/Arxiv.Org, 2023



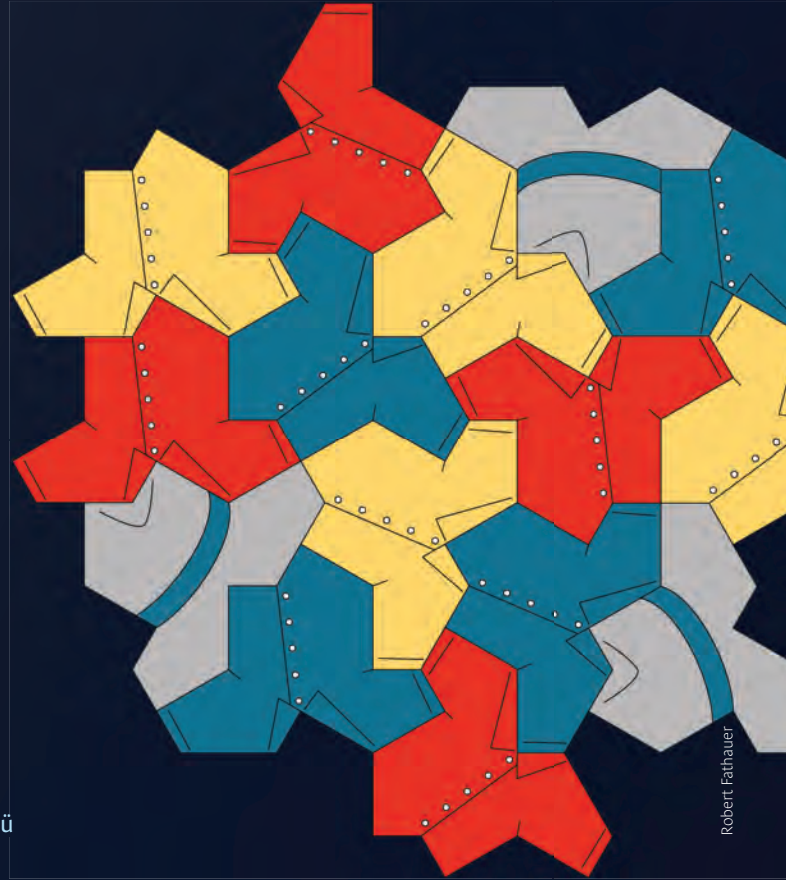
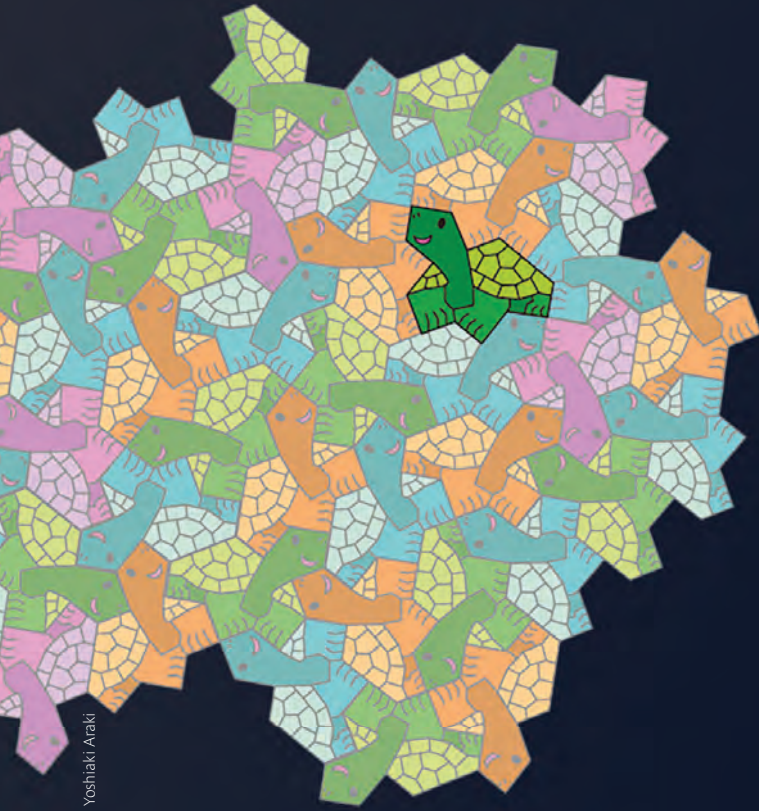
Karekodu okutarak şapka karosunun kenar uzunlukları değiştirilerek elde edilen şekil ailesini gösteren bir GIF görseline erişebilirsiniz.

üyenin geometrilerini kullanarak, bu iki üye ile uzun ve kısa kenarların birbirine eşitlendiği tam ortadaki üye hariç ailedeki tüm üyelerin aperiyojik olduğunu kanıtlayabildi. Döşemelerle ilgili araştırma alanı için bir yenilik niteliği taşıyan bu yaklaşımla, daha önce aperiyojikliği kanıtlamak için kullanılan mevcut üç yaklaşıma bir yenisi eklenmiş oldu.

Greenfeld, matematikçilerin bu yeni tür döşeme için bir çeşit kaynak bulup bulamayacağını bir sonraki basamak için önemli bir soru olabileceğini düşünüyor. 1981’de Nicolaas de Brunjin adlı matematikçi Penrose döşemelerinin periyodik beş boyutlu döşemelerin iki

İkinci ispat ise şapkanın esasen birbirinin devamı olan şekillerin oluşturduğu bir kümenin parçası olduğu gerçeğine dayanıyordu: Ekip, şapkanın kenar uzunluklarını aşamalı olarak değiştirerek aynı aperiyojik deseni meydana

getirebilen bir karolar ailesi oluşturabildi. Bu karolar ailesinin iki aşırı ucunda, birinin şekli “V” harfini, diğerininki bir kuyruklu yıldız andıran birer üye bulunuyor. Araştırmacılar V ve kuyruklu yıldız şekilli iki



Şapka karosundan yola çıkılarak oluşturulan bir kaplumbağa figürü döşemesi. Sanatçı Yoshiaki Araki, tasarımını sergilediği Twitter paylaşımında şapka karosu döşemesindeki karoların yaklaşık %12,7'sinin diğerlerinin ayna görüntüsü olduğu bilgisini paylaşırken takipçilerine ön plana çıkardığı kaplumbağa dışında ayna görüntüsü olan diğer kaplumbağanın yerini bulma şeklinde minik bir bulmaca ödevi veriyor. Ayna görüntüsü olan diğer kaplumbağayı siz görebildiniz mi?

boyutlu gölgeleri olduğunu göstermişti. Greenfeld'e göre, şapka döşemesinin de dinamik ya da yapısal olarak daha yüksek boyutlu periyodik döşemelere karşılık geldiği tespit edilirse bu çok ilginç bir bulgu olacak.

Öte yandan Socolar bir fizikçi olarak şapka döşemesinin materyal özelliklerini incelemeye başladı. Socolar bu döşemelerden birinin içinden ışık geçirildiğinde elde edilen kırınım deseninin araştırmacıların kuazikristallerde

Aperiodyk karo arayışları sırasında ortaya çıkan kimi başka döşemeler gibi şapka döşemesi de sanatçılara ilham kaynağı oluyor. Şapka karosundan ilham alan yukarıdaki tasarımın sahibi Robert Fathauer adlı sanatçı da bunlardan biri.

gözlemedikleriyle aynı keskin tepe noktalarına sahip olduğunu bulguladı. Yine de şapka döşemesinin kendisine daha önce gördüğü her şeyden farklı görüldüğünü de belirtti. ■

Kaynaklar

<https://www.quantamagazine.org/hobbyist-finds-maths-elusive-einstein-tile-20230404/#>

<https://www.sciencenews.org/article/mathematicians-discovered-einstein-tile>