

Öklid'i Okurken

Prof. Dr. Ali Sinan Sertöz [*Bilkent Üniversitesi - Fen Fakültesi - Matematik Bölümü*

Bilim nedir ve ne zaman ortaya çıkmıştır?

Günümüz akademisyenlerinin yaptığı gibi kimsenin ilgisini çekmeyen, mümkünse daha önce kimsenin el atmaya değer görmediği bir konu bulup o konu hakkında yanlış olmayan, doğru olması da kimsenin umurunda olmayan yüzlerce makale yazmak bilim midir?

Dergilere makale kabul ettirmenin marifet sayılması son dönemlerin hastalığıdır. Bunu bilim sayarsak daha önce hiç bilim insanı yok muydu?

Gerçek hayattaki olguları soyut kavramlara tercüme edip bu soyut kavramlar arasındaki mantık kurallarını takip ederek çıkarılan sonuçları derlemeyi ve bunları tekrar gerçek hayata tercüme edip doğadaki gözlemlerimizle karşılaştırmayı bilim olarak tanımlasak ve bu çeşit bilimle uğraşmış ilk insanlar kimdi diye baksak, karşımıza çıkacak ilk isim herhalde Öklid olurdu.

•

Nokta, büyüklüğü olmayandır.



Doğrular, Açılar, Paraleller

Gerçek hayatta yere bir çubukla bir doğru çizebiliriz. Derste tahtaya tebeşirle bir çember çizilir. Bir binanın duvarları yere diktir. Eşyalar kaymasın diye zemin düz yapılır. Geometri ilk başta sanki sağduyuyla zaten kotarılan işler topluluğu gibi görünür, ama işler biraz ilerleyip şekli düzgün olmayan bir tarlanın alanını hesaplamak, bir dağın yüksekliğini bulmak ya da Dünya'nın eğriliğini hesaplamak gibi konulara heves edildiğinde sağduyunun yetersiz kaldığı görülür.

Bu çeşit durumlarda kullanılmaya hazır bir bilgi birikimine ihtiyaç vardır. Bu birikimi sağlamak için önce gerçek hayattaki nokta, doğru, düzlem gibi varlıkları soyutlayıp kuramsal kavramlar olarak düşünmek ve sonra idealize edilmiş bu kavramların birbirleriyle ne çeşit bir ilişki içinde olacaklarını itiraza yer bırakmayacak şekilde mantık kuralları dâhilinde incelemek gerekir.

Bu süreçte ele alınıp kuram dünyasında yeniden kurulan nokta, doğru ve düzlem gerçek hayatta yoktur. Tahtaya ne kadar küçük bir nokta koymaya çalışırsanız çalışın, çok yakından baktığınızda aslında bunun bir leke olduğunu görürsünüz. Günlük hayatta belli bir büyüklüğün altındaki lekeleri nokta kabul etmemizde bir sorun yoktur. Ama bir mimarın nokta için koyacağı sınır ile bir sinir cerrahının koyacağı sınır farklı olacaktır. Her biri için ayrı ayrı geometri türetmek gerekli değil. İşte bilim kavramı burada işin içine giriyor.

Nokta hiç büyüklüğü olmayan ideal bir kavram olarak düşünülür. Çizgi hiç kalınlığı olmayan, sadece uzayıp giden bir şekil olarak düşünülür. Doğru ise eğilip bükülmeyen bir çizgi olarak idealize edilir. Bunlar elbette gerçek hayatta olmayan şeylerdir.

Sonra bunların birbiriyle olan ilişkileri incelenir, bazıları hemen akla gelen bazılarıysa “yok artık” dedirten ilişkiler bulunur. Ve bunların bir kısmı, ki baştan hangi kısmı olacağı hiçbir zaman kestirilemez, gerçek hayattaki günlük problemler modellendiğinde onlara çözüm yolları gösterir.

İşte en yalın haliyle bilim budur ve bunu ilk uygulayan kişinin Öklid olduğu düşünülür. Öklid'den önceki dönemde, Aristoteles dâhil, filozoflar doğayı betimlemiş, akıl yürütmüş ama soyut modeller kurmamışlardır.

Geometri ve Gerçek Hayat

Öklid gerçek hayattaki nokta, doğru gibi kavramları soyut kavramlar olarak ele almış ve ideal bir dünyadaki davranışlarını incelemiştir.

Öklid'in dünyasının soyutluğunu kavramak için bir örnek aktarayım.

Öklid geometrisinin varsayımlarından biri der ki, iki doğruyu birden kesen bir doğrunun bu doğrularla aynı tarafta oluşturduğu iç açılar toplamı iki dik açıdan küçük olursa bu iki doğru o yönde uzatıldıklarında kesişir. Bu bir sonuç değil bir beklentidir; bunun geçerli olduğu bir ortamda çalışacağız, der.

Bunu gerçek hayata aktarabiliriz. İki doğruyu öyle çizelim ki onları kesen bir doğrunun aynı tarafta yaptığı açı iki dik açıdan azıcık az olsun. Bu "azıcık az" sözünü yeterince küçük bir açı olarak sayıya dökersek bu iki çizginin evrenimizin bugün bilinen sınırlarının çok ötesinde kesişeceklerini hesaplayabiliriz. Gerçek hayatta bu doğrular her uygulayıcı için paraleldir ama matematikçiler için paralel değildir. Gerçek hayatta bu iki çizgi bizim için anlamı olan alanda kesişmezse paraleldir, matematikte ise bu iki çizgi hiç kesişmezse paraleldir.

Soyut modellerle gerçek hayattaki problemin modeli arasında anlamlı ve verimli bir alışveriş olabiliyorsa o zaman bilim yapıyoruz demektir. Bu anlamda bilim, Öklid ve çağdaşlarının olguları soyutlamayı düşünmesiyle başlamıştır diyebiliriz.

Elemanlar

Öklid'in yukarıda sıralanan kurallar çerçevesinde yazdığı *Elemanlar* bir geometri, oranlar ve sayılar kuramı kitabıdır. Bugün anladığımız anlamdaki uygarlığın düşünme ilkelerini ortaya koyduğu için binlerce yıl okullarda geometri adı altında, ama aslında düşünme yöntemi kılavuzu olarak bu kitap okutulmuştur. Son dönemlerde eğitimin amacı insan yetiştirmekten çok kütlelere genel kültür vermeye yöneldiği için *Elemanlar* ders kitabı olarak kullanılmamaya başlandı. Ama yine de her uygar insanın en az bir kez eline *Elemanlar*'ı alıp iki bin üç yüz yıl önce Akdeniz havzasında neler düşünülüyormuş diye bakması gerekir bence.

Ne vardır *Elemanlar*'ın içinde? İlk dört kitap düzlem geometrinin ana teoremlerini türetir. Doğrular, üçgenler, çemberler ve çemberlerin içine ve dışına çizilebilecek şekiller ve bunların nasıl çizileceği bu ilk dört kitapta anlatılır. Tüm çizimler cetvel ve pergelle yapılır ama bunlar da gerçek hayatta kullandığımız cetvel ve pergel değil, geometri için idealize edilmiş cetvel ve pergeldir. Yani cetvelin üzerine kültürden kültüre değişecek uzunluk birimleri işlenmemiştir, cetvel sadece iki noktayı birleştiren doğrunun çizildiğini göstermek için kullanılır. Pergelin de üzerinde ayaklarının ne kadar açıldığını gösteren ölçü aygıtı yoktur. Bir ucu kâğıda batmaz, öbür ucunda da kâğıdın üzerine kalınlığı olan çizgi çizecek bir kurşun kalem yoktur. Pergel, sadece bir merkez ve bir uzunluk biliniyorsa, o merkez etrafında o uzunluğa eşit yarıçapta bir çember çizilebileceğini göstermek için vardır.

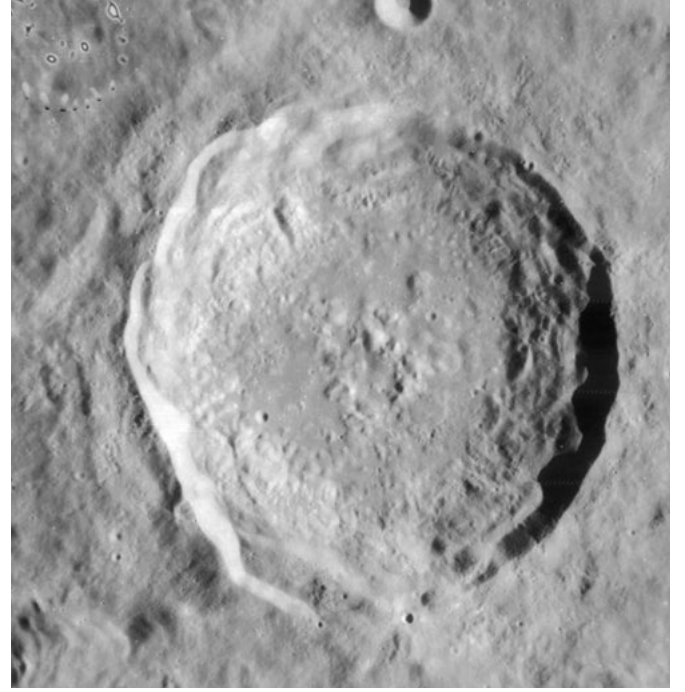
Bu kitaplarda sistematik bir şekilde sunulan bilgilerin Pisagor ve öğrencileriyle Kos Adası doğumlu Hippocrates'e ait olduğu düşünülüyor. Pisagor'un maceralarını hepimiz biliyoruz. Hippocrates'in da onunkinden aşağı kalmayan maceralı bir hayatı vardır.



Koslu Hippocrates

Hippocrates'in (MÖ 470-410) aklında matematikçi olmak hiç yoktu. Kos'ta kendi halinde ticaret yaparken dolandırıldı ve dava açmak için Atina'ya gitti. İşte ne olduysa ondan sonra oldu. Orada edindiği arkadaşlarının aklına uyararak matematikle ilgilenmeye başladı. Zamanla Atina'ya niye geldiğini unutup hayatını matematikle geçirmeye başladı.

Bugün matematikte ekmek ve su gibi doğal bulduğumuz pek çok temel ögeyi Hippocrates uygulamaya soktu. Geometri şekillerinde noktalara harfler kullanarak ad verme ve kanıt içinde o harfleri kullanma yöntemini ilk kez uygulayan Hippocrates'tir. Kanıt yaparken, kanıtlanması istenilen sonucun yanlış olduğunu varsayarak yola çıkıp bir çelişki yakalayınca "demek ki başta söylediğimiz doğruymuş" demeyi ilk akıl eden ve bize öğreten de odur. Kendisi de bir *Elemanlar* kitabı yazdıysa da kitabı değil fikirleri kalıcı olmuş ve Öklid'in üçüncü kitabında, adını anmasa da onun bulduğu sonuçları kullanması sayesinde ölümsüzleşmiştir.



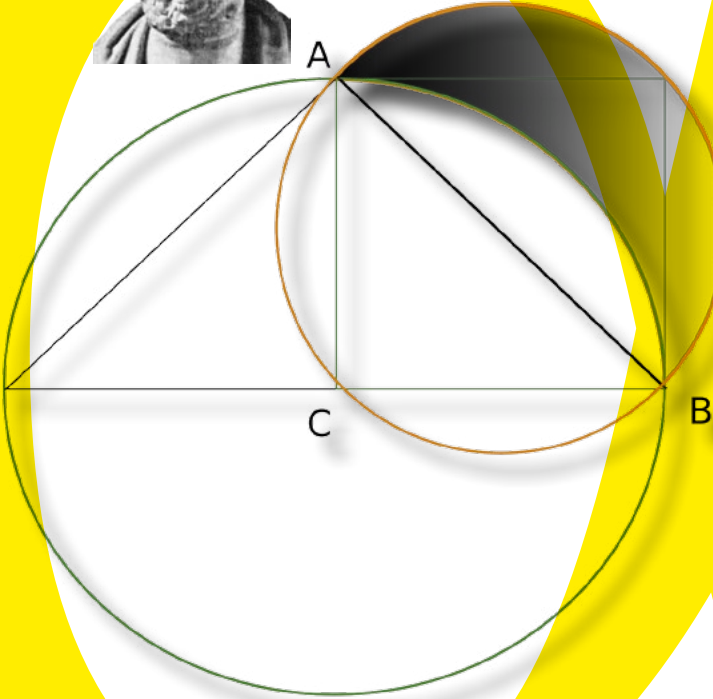
Knidoslu Eudoxus

Eudoxus (MÖ 390-337) yıldızları seyretmekten zevk alan bir babanın oğlu olarak Knidos'ta doğdu. Geometrinin değil de aritmetiğin evrenin anahtarı olduğunu söyleyen hocalardan matematik öğrendi. Öğrenci olduğu dönemde matematikte en çok merak edilen konu sayıların ne olduğu konusuydu. Her büyüklüğün iki tam sayı oranı olarak ifade edileceği düşünülüyordu. Derken Pisagorcular ikizkenar bir dik üçgenin hipotenüsünün bu şekilde ifade edilemeyeceğini gördü. Herkesin dünyası başına yıkıldı! Tam evrenin tüm sırlarını sayılarla açıklamaya heveslenirken birdenbire sayının ne olduğunu bilmediğimiz ortaya çıktı.

Böyle bir problemle ancak babası yıldızlara bakan, hayal gücünü babasından miras olarak devralmış genç bir matematikçi başa çıkabilirdi, öyle de oldu. Knidoslu Eudoxus oranları sayıyla ifade etmenin zorluğunu sayıları oran olarak ifade ederek yendi. Her dâhiyane fikir gibi çok basit ve "ben niye akıl etmedim" dedirten doğallıkta bir yaklaşım.

Öklid'in beşinci kitabı işte Eudoxus'un oranlar kuramını anlatır. Ta on dokuzuncu yüzyılda Richard Dedekind gelip rasyonel sayılardan reel sayıları elde etmenin başka bir yolunu gösterene kadar binlerce yıl Eudoxus'un yaklaşımıyla sayıları kavradık.

Böyle bir adamın adını Ay'daki bir kratere vermek yetmezdi elbette, Mars'taki bir krater de Eudoxus'un adını taşı.



Atinalı Theaetetus

Antik dönemin çoğu Akdeniz havzasının değişik köşelerinde doğmuş matematikçileri arasında Theaetetus (MÖ 417-368) Atina'da doğan birkaç matematikçiden biridir. Sokrat'ın ve Eflatun'un arkadaşıdır. Hatta Eflatun yazdığı diyaloglardan birinde onu baş karakter olarak almış ve kitaba onun adını vermiştir. Hakkındaki bazı bilgiler, Eflatun'un yalancısı olma pahasına, bu kitapta derlenmiştir.



Eflatun

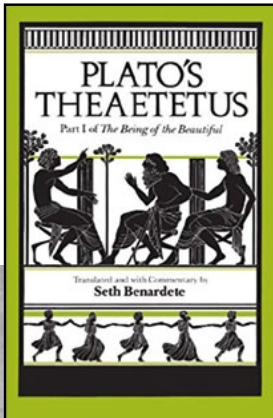
Theaetetus genç meslektaş Eudoxus gibi sayılarla ilgilenmiştir. Özellikle irrasyonel sayılarla çalışmış ve geometrik

çizimlerde de kullanılan on üç irrasyonel sayı sınıfını incelemiştir. Bu çalışmaları Öklid'in *Elemantar*'ının en uzun kitabı olan onuncu kitapta anlatılır.

Theaetetus uzay geometrisiyle de ilgilenmiş ve Pisagorcular tarafından bilinen Platonik cisimlere ek olarak sekiz ve yirmi yüzlü Platonik cisimleri inceleyen ve özelliklerini ortaya koyan da o olmuştur. Bunlar da *Elemantar*'ın on üçüncü kitabında anlatılır.

Zamanın tüm soyluları gibi savaşlarda en önde olma ayrıcalığını kullandığı bir sırada yaralanmış, yaralarının mikrop kapması sonucunda ölmüştür.

Ay'da bir kratere onun adı verilmiştir.

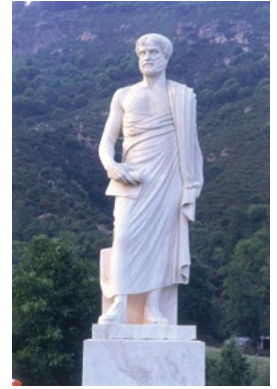


Eflatun'un Theaetetus'a ithafen yazdığı diyaloglar

Aristoteles Olmadan Olmaz

Eski dönem matematikçilerinden söz ederken pek çoğunun İskenderiye'de ya çalıştığını ya da İskenderiye'ye öğrenim görmek için gittiğini görürüz. İskenderiye'de bu bilim ikliminin oluşup gelişmesinin baş sorumlusu Aristoteles'tir.

Eflatun'un ölümünden sonra, Makedonya kralı II. Philip Eflatun'un en meraklı öğrencilerinden olan Aristoteles'i oğlu İskender'e hocalık yapması için davet eder. İskender'e ders verdiği sınıfta geleceğin krallarından I. Ptolemy Soter de vardır. Ptolemy, İskender ölünce imparatorluğun Mısır ayağına önce vali sonra kral olmuştur. İskenderiye'de bilimin gelişmesi için uygun bir ortam yaratabilmesi hocasından aldığı eğitimin sonucudur. Nitekim ondan sonra gelen krallar böyle bir eğitimden geçemedikleri için zamanla İskenderiye'deki bilim iklimi bozulmuş, hatta VIII. Ptolemy şehrin tüm entelektüel tabakasını ya kovmuş ya da öldürmüştür.



Aristoteles'in Makedonya'daki okulu



Theaetetus krateri

İçindekiler

İskenderiye parlak dönemlerini yaşarken Öklid de orada düşünce tarihine silinmez bir iz bırakan kitabı *Elemanlar*'ı yazmıştır. *Elemanlar*'ın on üç kitaptan oluştuğunu söylemiştik. Her kitabın konusu farklıdır.

1. Düzlem geometrinin temelleri: Doğrular
2. Geometriye ilişkin hesapların temelleri
3. Düzlem geometrinin temelleri: Çemberler
4. Çemberlerin içine ve dışına çizilen şekiller
5. Oranlar
6. Benzer şekiller
7. Temel sayılar kuramı
8. Sürekli oranlar
9. Sayılar kuramının uygulamaları
10. Eşölçeksiz nicelikler
11. Uzay geometrisi
12. Uzay geometrisinde oranlar
13. Platonik cisimler

Öklid'den sonra gelen matematikçilerden bazıları, eğer Öklid devam etseydi ne yazardı sorusuna cevap arayıp on dördüncü ve on beşinci ciltleri de yazmıştır. İskenderiyeli Hypsicles (MÖ 190-120) Öklid'in on üçüncü kitapta incelediği Platonik cisimleri ayrıntılı olarak incelemeye girişmiş ve aynı küre içine çizilen Platonik cisimlerin hacimleriyle yüzey alanlarının oranlarını hesaplamıştır. Altıncı yüzyılda Ayasofya'nın yeniden inşa edilmesiyle görevlendirilen iki mimardan biri olan Miletli İsidore de Platonik cisimleri incelemeye devam etmiş ve yazdığı kitabı *Elemanlar*'ın on beşinci cildi olarak adlandırmıştır. Öklid'in yazmadığı bilinmesine rağmen bu iki cilt yakın zamana kadar Öklid tercümelerine dâhil edilmiştir. Henrion'un 1632'de yaptığı Fransızca çevirinin başlığında bile Öklid'in on beş kitabının çevirisi olduğu ilan edilir.

Miletli İsidore'nin arkadaşı Anthemius'la beraber yaptığı Ayasofya'nın içinden bir görüntü: Geometrinin taşa işlenmiş hali.



Yöntem

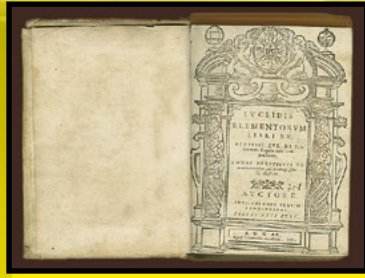
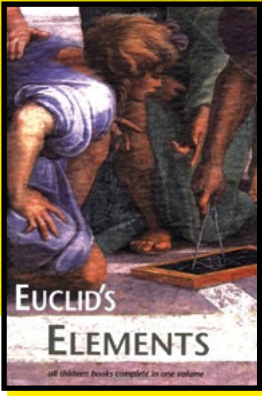
Öklid'in insanı kışkırtacak düzeyde disiplinle uyguladığı bir kanıt yöntemi vardır. En azından birinci kitap boyunca bu böyledir. Tamamen sözel olarak ifade edilmiş önerme metninden sonra kanıt başlarken, Öklid özenle bir şekil çizimi tarif eder. Verilen ayrıntılarla şekli çizmek mümkün olmasına rağmen Öklid çizilmiş şekli de verir. Bu şekil üzerinde hangi kabullerin yapıldığını açıklar ve "Diyorum ki" diyerek yine şekildeki harfleri kullanarak neyi kanıtlamak istediğini belirtir.

Sonra titiz bir kanıt başlar. Örneğin kenar-açı-kenar eşitliği varsa ve iki üçgenin aynı olacağı biliniyorsa, "normal" bir insan karşılıklı iki kenarın ve aradaki açılardan eşit olduğunu gösterir göstermez "bu üçgenler aynıdır" der. Ama Öklid normal bir insan değildir! Bu noktada "öyleyse iki kenar AB, BC, iki kenar DE, EF'ye eşittir ve bir açı bir açıya eşittir, yani eşit kenarların arasında kalan açılar.

1509'da basılmış bir *Elemanlar* kitabı. Başlıkta yazar olarak İskenderiyeli Öklid yerine yanlışlıkla Megaralı Öklid yazıyor.



1504'te basılan bir *Elemanlar*. On beş kitaptan oluştuğu yazıyor. Yakın zamana kadar sık yapılan bir hatayı bu.



Elemanlar'ın 2017 tarihli en son baskısı. Heath'in 1908 tarihli çevirisinin Heath'in yorumları olmadan basılmış hali.

Bu durumda iki üçgen aynı olur” der. Başta kurduğu ilk cümlelerin ifadesinin de, kenar-açı-kenar eşitliğinin üçgenlerin aynı olmasına yol açacağını söylediği önermenin ifadesine benzemesine özen gösterir. Bu titizlikten dolayı birkaç paragrafta bitmesi beklenen kanıt uzar.

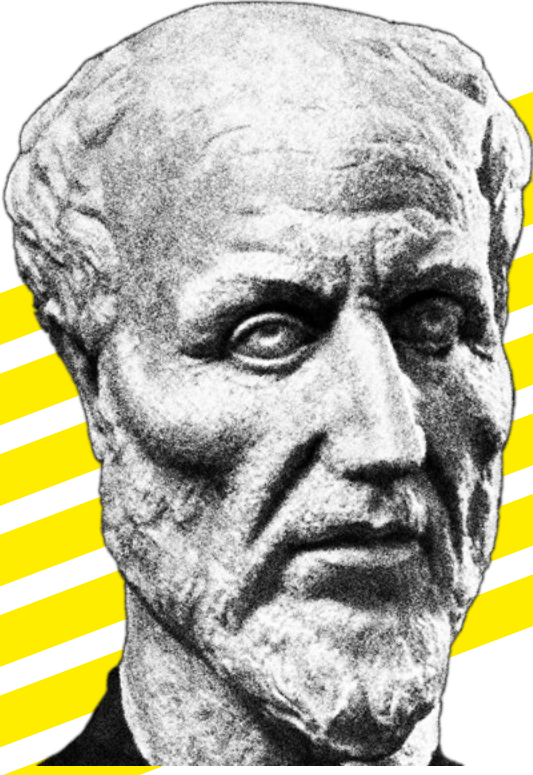
Kanıtın sonunda, en başta şekil üzerindeki harfleri kullanarak “Diyorum ki” diye başladığı iddiayı kanıtladığını belirtmek için, “Böylece” diye başlayarak o en baştaki cümleyi tekrarlar. Siz tam bitti derken “Bundan dolayı” diye başlayarak önermenin hiçbir şekle bağlı olmayan ifadesini tekrarlar ve “kanıtlanması gereken de buydu” diyerek bitirir.

Eğer Öklid'in yalnızca birinci kitabını okuduysanız ona kıskançlıkla yoğurulmuş bir hayranlık duyarsınız.

Oysa kitaplar ilerledikçe Öklid'in kitabundan bu disiplin kalkmaya başlar. Ya Öklid yorumlamaya başlamıştır ya da binlerce yıldır kitabı elden ele dolaştırıp kopyalayan kâtipler sıklıkla kanıtları kısa kesmeye başlamıştır.

Öklid daha hemen ikinci kitapta, yedinci önermede kullanılacak olan ve altıncı önermedeki şekle benzeyen şekli tarif ederken birden kesip “ve şekil çizilsin” der. Sıkılan ya Öklid'dir ya da “nasıl olsa patron kontrol etmez” diyen kâtip. Bir sonraki önermenin şekli de “ve şeklin tamamı çizilsin” denilerek verilir!

Dördüncü kitabın on dördüncü önermesinde kanıtlanacak şeyler bir önceki önermede kanıtlanan şeylere benzer. Öklid'in disiplininden okuyucunun beklentisi bu yeni kanıtın da bir önceki önermenin kanıtında olduğu gibi oya gibi işlenerek tüm ayrıntılarıyla verileceği yönündedir. Oysa yine ya Öklid ya kâtip sıkılmıştır. “Öncekinde olduğu gibi” diye başlayan bir cümle okuyucuyu rahatlatır. Artık Öklid bile bunu yapıyorsa, der ve kendi kusurlarımızı hoş görürüz.



Hangi Kitap

Proclus'un günde en az yedi yüz satır yazdığını öğrendiğimde aklıma ilk gelen soru günde kaç satır okuduğu olmuştu. Ciddi pek çok romancı her akşam yatarken hızlı da olsa bir roman okur, not alır. Başka türlü beslenip yazı yazamazlar zaten.

Sık sık beni ziyarete gelen bir öğrencim vardı. Bir gün okul dergisine yazdığı bir yazıyı getirdi, nasıl buldunuz dedi. Yalan söyleyemeyecek kadar çok sevdiğim bir öğrenciydi. Yazısını nasıl bulduğumu söyleyiverdim. Doğru dürüst yazabilmesi için çok okuması gerektiğini söyledim. Dudaklarının kenarında alaycı bir tebessümle "hangi kitabı okumamı tavsiye edersiniz" dedi. Okuyarak bir yere varmanın spor yaparak fazla kilolardan kurtulmaya benzediğini söyledim. İnsan bir sabah kalkıp spor yapıp öğlene fazla kilolarından kurtulmaz. O kilolar kaç yılda biriktiyse o kadar yılda, disiplinli bir spor programıyla gitmelerini beklemenin mantıklı olduğunu söyledim.

Öğrencim bir daha beni ziyarete hiç gelmedi.

Acaba Öklid'in *Elemantar*'ıyla bir başla bakalım dese miydim diye düşündüğün günler oluyor.

İstanbullu Proclus

Öklid ve Platon hakkındaki en önemli bilgileri onlardan yüzlerce yıl sonra yaşamış Proclus'tan alırız. Proclus (412-485) Bizans sarayında üst düzey hukukçu bir babanın oğlu olarak dünyaya geldi. Babası gibi hukuk eğitimi aldı ve iyi bir hukukçu oldu, ama insan rahat durmuyor işte. Devlet katındaki parlak geleceğini elinin tersiyle itip felsefe ve matematik öğrenmek için önce İskenderiye'ye sonra Atina'ya gitti. Eflatun'un sekiz yüz yıl önce kurduğu Akademi'de öğrenci oldu. Son derece parlak bir öğrenciydi. Öyle ki Akademi'nin başındaki hoca öldüğünde onun yerine geçirildi. O sırada yirmi beş yaşındaydı. Vejetaryen, bekâr ve cömert bir insan olarak kırk sekiz yıl Akademi'yi yönetti. Öklid'in birinci kitabı üzerine yazdığı yorumlar eski dönem matematiği ve Öklid'in kitabı hakkında günümüze kalan en ayrıntılı ve en güvenilir bilgileri içerir.

Proclus'un her gün en az yedi yüz satır yazmadan yatmadığı anlatılır.

... Okuyarak bir yere varmanın spor yaparak fazla kilolardan kurtulmaya benzediğini söyledim.

İnsan bir sabah kalkıp spor yapıp öğlene fazla kilolarından kurtulmaz.

O kilolar kaç yılda biriktiyse o kadar yılda, disiplinli bir spor programıyla gitmelerini beklemenin mantıklı olduğunu söyledim.

İyi Okumalar

Öklid'in *Elemanlar* kitabını ilk kez okumaya başlanlar kitabı biraz karmaşık ve okunması zor bulacaklar, öve öve bitiremediğin kitap bu mu diyeceklerdir. Sorun kitapta değil. Sorun bu kitabın nasıl okunacağını doğru tespit etmekte.

Kütüphanede rastgele bir matematik kitabını elinize alsanız ve açıp okumaya başlasanız ne anlarsınız? Ben hemen söyleyeyim: Hiçbir şey anlamazsınız. Çünkü bir matematik kitabı öyle okunmaz.

Bir matematik kitabını okumak için sakın, sessiz bir yere çekilmeniz ve yanınıza birkaç kalem ve bolca boş kâğıt almanız gerekir. Sonra bir okuyup, on düşünüp, yirmi yazmanız gerekir. Tekrar tekrar. Bir ara, yazarın bir sonraki sayfalarda ne söylemesi gerektiği konusunda bazı beklentileriniz oluştuğunu hissetmeye başlarsınız. Ve yazar gerçekten sizin beklediğiniz şeyleri söylemeye başladığında bedeninizi bir sıcaklığın sardığını fark edersiniz, işte matematik virüsünü kaptığınız an o andır.

Daha sonra boş vakitlerinizde, bazen aklınızdan bazen de kâğıt kalemle Pisagor'un dik üçgen teoremini yeniden çizip kanıtı yeniden yazacak ve her seferinde heyecan duyacaksınız. Bunun bir zararı yok, kimselere anlatmayın yeter.

Geometri virüsünü kapmanız umuduyla,
iyi okumalar!.

Kaynaklar

Tosun, A. R., Hüseyin Rıfık Tamani ve Elementler çevirisi, Atatürk Kültür Merkezi Yayınları, 2010.

Öztürk, Ö. ve Pierce, D., Öklid'in Öğelerinin 13 Kitabından Birinci Kitap, <http://mat.msgsu.edu.tr/~dpierce/Dersler/113/2015/oklid-yunanca-turkce-2015-09.pdf>

Sertöz, A. S., Öklid'in *Elemanlar*'ı, <http://sertoz.bilkent.edu.tr/elemanlar.htm>

Heath, T., The Thirteen Books of Euclid's Elements, Dover Yayınları, 1908.

Fitzpatrick, R., Euclid's Elements of Geometry, <http://farside.ph.utexas.edu/Books/Euclid/Elements.pdf>

