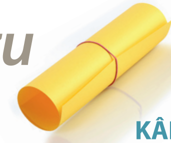
Ali Doğanaksoy

Usta Kaptanlar

LEONHARD EULER

(d. 15 Nisan 1707, Basel, İsviçre - ö. 18 Eylül 1783, St. Petersburg, Rusya), İsviçreli matematikçi ve fizikçi.
Adı, Arşimet ve Gauss ile birlikte tüm zamanların en büyük üç matematikçisinden biri olarak anılır.
En üretken matematikçilerden biri olarak, çalışmalarının bütünü 70 cildi aşar. Euler pek çok yeni kavram geliştirmiş, basit aritmetikten sayılar kuramına, geometriden topolojiye kadar farklı alanlarda birçok önemli teoremi ispatlamıştır. Çalışmaları sırasında, günümüzde kullanılan modern matematik terminolojisini oluşturmuş, fonksiyon kavramının tanımını vererek f(x) gösterimini kullanmıştır (yaptığı bu çalışma için verilebilecek örneklerden bazıları trigonometrik fonksiyonlar için sin, cos ve tan tanımlamalarıdır). Matematiğin gelmiş geçmiş en dikkat çekici ifadelerinden biri olan $e^{i\pi} + 1 = 0$ eşitliği Euler tarafından bulunmuştur. 1736 yılında Königsberg'in 7 köprüsü adlı ünlü problemi çözmüştür. Bu çözüm için izlediği yöntem, geçen ay Kum Havuzu'nda yer alan "El Kaldırmadan Çizim" problemine bu sayıda verdiğimiz çözümün özünü oluşturur. Ayrıca düzlemsel çizgeler için nokta, kenar ve yüz sayılarını içeren ünlü $N - K + Y = 2$ formülünü de Euler bulmuştur. Bu formül geçen sayının Eğlence Havuzu kısmında sorduğumuz ve aşağıda çözümünü verdiğimiz Karedeki Bölgeler sorusunun cevabında kullanılmıştır.

Kum Havuzu



KÂĞIT SİLİNDİR

A4 ebadında bir dosya kâğıdını silindir olacak şekilde yuvarlayacağız. Sizce uzun kenarlarını yapıştırarak oluşturacağımız silindirin mi yoksa kısa kenarlarını yapıştırarak oluşturacağımız silindirin mi hacmi büyüktür? Yoksa fark etmez mi?

KIRIK ZİNCİR

Her biri üç halkadan oluşan beş zincir parçasını birleştirerek 15 halkalı tek bir zincir elde etmek istiyorsunuz. Demirci ustası bir halkayı kesip başka halkaların arasından geçirdikten sonra tekrar kaynaklamak için halka başına beş lira istiyor. Zinciri oluşturmak için kaç lira ödersiniz?

KÂR-ZARAR?

20 TL'ye aldığınız bir ürünü 21 TL'ye satıyorsunuz. Sonra aynı ürünü 25 TL'ye tekrar alıp, 26 TL'ye satıyorsunuz. Sonuç ne oldu? Kâr mı ettiniz, zarar mı?

CEPTEKİ MİSKETLER

Vehbican'ın sağ cebinde tek sayıda, sol cebinde çift sayıda misket vardır.
Bir cebindeki misketlerin sayısını 6 ile, diğerindekini 5 ile çarpıp bu çarpımları topladığında sonuç 83 oluyor.
Vehbican'ın ceplerinde toplam kaç misket var?

Eğlence Havuzu

TOPLAM

5 sayısı 3 doğal sayının toplamı olarak, yazılış sırasını da gözeterek, 6 farklı şekilde yazılabilir:

$5 = 1+1+3 = 1+3+1 = 3+1+1$
$= 1+2+2 = 2+1+2 = 2+2+1$

2013 sayısı üç doğal sayının toplamı olarak kaç farklı şekilde yazılabilir?

ÇORAPLAR

Bir çorap atölyesinde 9 çırak ile bir usta çalışmaktadır. Çırakların her biri bir saatte 15 çorap örmekte, usta ise atölyedeki 10 kişinin bir saatlik ortalama üretiminden 9 çorap fazla örmektedir. Atölyede bir saatte kaç çorap üretilmektedir?

99 TOPLAMINI BULMA

1234567 sayısında rakamların arasına + işaretleri koyarak 100 toplamını elde edebiliriz:

$$1 + 2 + 34 + 56 + 7 = 100$$
$$1 + 23 + 4 + 5 + 67 = 100$$

987654321 sayısının rakamları arasına + işaretleri yerleştirerek 99 toplamını nasıl elde edebilirsiniz?

ZAMANI DOĞRU GÖSTEREN YANLIŞ SAAT

Saat tamircisi Osman usta, akşam saatlerinde onarımını bitirdiği bir duvar saatinin akrep ve yelkovanını dalgınlıkla yanlış yerleştirir. Akrebin takılacağı yuvaya yelkovanı, yelkovanın takılacağı yuvaya da akrebi takar. Kolundaki saate baktığında saat tam altıdır. Onarımını henüz bitirdiği saatin akrebini altıya, yelkovanını da on ikiye hizalayıp saati çalıştırır. İki saat kadar diğer işleri ile ilgilendikten sonra dükkânını kapatmadan önce duvar saatine bir göz attığında saniyesi saniyesine doğru zamanı gösterdiğini görür. Ertesi sabah erkenden dükkânına geldiğinde ilk işi yine duvar saatine bakmak olur. Saat yine tam olarak doğru zamanı göstermektedir. Ne olduğunu açıklayabilir misiniz?

matematik.havuzu@tubitak.gov.tr

Olimpik Havuz

ASAL SAYILAR

$p^4 + p^3 + p^2 + p = q^2$ denklemini sağlayan tüm p ve q asal sayılarını bulunuz

PARALELLİK

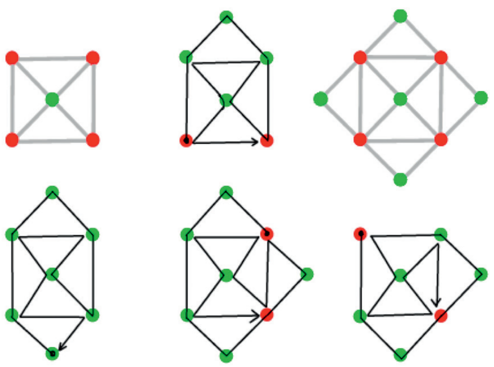
Bir *ABC* üçgeninin iç teğet çember merkezi *I* olsun. İç teğet çemberi *BC, CA* ve *AB* kenarlarına sırasıyla *A′* , *B′* ve *C′* noktalarında değiyor. *A′B′* doğru parçasının orta noktası *M* ve *I* nın *AA′* doğrusuna dik izdüşümü *P* olsun. *MP* ile *AC, N* noktasında kesişiyorsa *A′N* doğrusunun *B′C′* doğrusuna paralel olduğunu gösteriniz.

GEÇEN SAYININ ÇÖZÜMLERİ

Kum Havuzu

EL KALDIRMADAN ÇİZİM

Genelliği bozmadan şekli çizmeye bir köşeden başladığımızı kabul edebiliriz. Bir köşeden başlayıp bir başka köşeye, oradan elimizi kaldırmadan başka köşeye, diye devam edeceğiz. Çizmeye başladığımız ve bitirdiğimiz iki köşe dışında kalan köşelere her uğradığımızda hemen ayrılacağımız için bu köşelerde buluşan doğru parçalarının sayısı, bir başka deyişle bu köşelerin derecesi çift olmalıdır. Buna göre ya her köşenin derecesi çift (bu durumda çizime başlanılan noktada çizim bitmiştir) ya da tam iki köşenin derecesi tek (biri çizime başlanılan, biri de çizimin bittiği köşeler), diğerleri çift dereceli olmalıdır.



Bu durumda 1. şekil derecesi tek sayı olan 4 köşesi olduğu için el kaldırmadan çizilemez.
2. şekil derecesi tek sayı olan tam 2 köşesi olduğu için el kaldırmadan çizilebilir, ancak nasıl çizilirse çizilsin illaki alt köşelerinin birinden başlanacak ve diğerinde çizim sonlanacaktır.
3. şekil derecesi tek sayı olan 4 köşesi olduğu için el kaldırmadan çizilemez.
4. şekil derecesi tek sayı olan köşesi bulunmadığı için el kaldırmadan çizilebilir ve çizimde başlangıç ve bitiş köşeleri aynı olmak zorundadır.
5. şekil derecesi tek sayı olan 2 köşesi olduğu için el kaldırmadan çizilebilir, ancak nasıl çizilirse çizilsin illaki derecesi 5 köşenin birinden başlanacak ve diğerinde çizim sonlanacaktır.
6. şekil derecesi tek sayı olan 2 köşesi olduğu için el kaldırmadan çizilebilir, ancak nasıl çizilirse çizilsin illaki derecesi 3 ve 5 olan köşelerinin birinden başlanacak ve diğerinde çizim sonlanacaktır.

DOMİNO TAŞLARI

Sol üst ve sağ alt köşelerdeki kareler aynı renktir. Beyaz olduğunu kabul edebileceğimiz bu kareler kesilip atıldığında satranç tahtasında 30 beyaz 32 siyah kare kalır. Tahtaya konulan 2x1 büyüklüğündeki domino taşlarının her biri 1 siyah, 1 de beyaz kare kapatır ve 31 domino taşının 30 tanesi tahtaya nasıl yerleştirilirse yerleştirilsin, 30 beyaz ve 30 siyah kare kapanmış olur, geriye kalan iki siyah kare tek bir domino taşı ile kapatılamaz.

Eğlence Havuzu

OLASILIK

Bir atışta zarların ikisi aynı anda atılıyor. Zarların toplamının 12 olması için (6, 6) gelmelidir (1/36 ihtimal).
Zarların toplamının 7 olması ise (1, 6), (2, 5), (3, 4), (4, 3), (5, 2), (6, 1) gelmesi ile mümkündür (6/36=1/6 ihtimal).
Güneş'in oyunu kazanma olasılığına p diyelim.
- İlk atışta 7 veya 12 gelmemişse (ihtimal: 29/36) Güneş'in bundan sonra kazanma ihtimali yine p olur. Bu durumun Güneş'in kazanma ihtimaline katkısı (29/36)p dir.
- İlk atışta 7 gelmiş, ikinci atışta 7 ve 12 dışında bir sayı gelmişse (ihtimal: (1/6)(29/36)) Güneş'in bundan sonra kazanma ihtimali yine p olur. Bu durumun Güneş'in kazanma ihtimaline katkısı (29/216)p dir.
- İlk iki atışta da 7 gelmişse (ihtimal: 1/36) Güneş kazanmış olur. Bu durumun Güneş'in kazanma ihtimaline katkısı 1/36'dır.

O halde $p = \left(\frac{29}{36}\right)p + \left(\frac{29}{216}\right)p + \frac{1}{36}$

yazabiliriz. Buradan da Güneş'in kazanma ihtimali p=6/13 bulunur. Ateş'in kazanma ihtimali de 1-6/13 yani 7/13'tür.

KARINCALAR

Karıncaların tanımladığı üçgenin alanı, karıncaların hareketi sonucunda değişmez. Başlangıçta sıfır olmayan bu alanın ölçüsü hep aynı kalacağı için üç karınca hiçbir zaman bir noktada buluşamaz.

TABAKLAR

Masada tabak konulabilecek yerleri 1'den başlayarak tam sayılarla etiketleyelim. İlk başta 1'den 6'ya kadar sayılarla etiketlenmiş yerlerde birer tabak bulunmaktadır. Şimdi tek sayı ile etiketlenmiş (1, 3, 5, ..) yerlerdeki tabakları sayalım. Başlangıçta bu sayı (1 numaralı yerde bir tabak, 3 numaralı yerde bir tabak ve 5 numaralı yerde bir tabak olmak üzere) 3 yani bir tek sayıdır. Tanımlanan hareketlere göre bu sayı her bir hamle sonunda ya 2 artar ya da 2 azalır. Yani hep tek sayı olarak kalır. Bir başka deyişle bu sayının tek sayı olması bu oyunun bir değişmezidir. Tüm tabakların bir yerde toplanması durumunda bu sayı ya sıfır ya da 6 olmalıdır, ki bu duruma ulaşmak imkânsızdır.

KAREDEKİ BÖLGELER

Bu soruda Euler değişmezini kullanacağız: $N - K + Y = 2$
Bu denkleme göre yüz sayısı $Y = K - N + 2$ 'dir.
Şimdi N ve K sayılarını bulalım.

Toplam nokta sayısı N:
A) Karenin çevresinde bulunan ve her birinin derecesi $n+2$ olan toplam $4n$ nokta,
B) Karenin iç bölgesinde bulunan ve her birinin derecesi 4 olan noktalar. Bunlar üç şekilde oluşabilir:

- Sağ ve sol dik kenarlardan seçilecek ikişer noktanın çapraz birleştirilmesi ile bir iç nokta oluşur. Bu şekilde toplam $\binom{n}{2}^2$ iç nokta vardır.
- Alt ve üst yatay kenarlardan seçilecek ikişer noktanın çapraz birleştirilmesi ile bir iç nokta oluşur. Bu şekilde toplam $\binom{n}{2}^2$ iç nokta vardır.
- Her bir yatay olarak çizilmiş n^2 doğrunun her birini kesen toplam n^2 dikey doğrunun oluşturduğu toplam n^4 iç nokta vardır.

Sonuç olarak toplam nokta sayısı $N = 4n + 2\binom{n}{2}^2 + n^4$ 'tür.

Toplam kenar (noktaları birleştiren doğru parçaları) sayısı K:
1. Derecesi $(n+2)$ olan $4n$ nokta $(n+2)\,4n$ kenarı
2. Derecesi 4 olan $2\binom{n}{2}^2 + n^4$ nokta $4\left(2\binom{n}{2}^2 + n^4\right)$ kenarı

ikişer kere belirleyecekleri için toplam kenar sayısı

$$K = \frac{1}{2}\left[(n+2)4n + 4\left(2\binom{n}{2}^2 + n^4\right)\right] = 2n^4 + 2n^2 + 4n + 4\binom{n}{2}^2 \text{ 'dir.}$$

Bu durumda toplam yüz sayısı:

$$Y = K - N + 2 = 2n^4 + 2n^2 + 4n + 4\binom{n}{2}^2 - n^4 + 2$$
$$= n^4 + 2n^3 + 2 + 2\binom{n}{2}^2$$

Buradan da $Y = 2\binom{n}{2}^2 + (n^2+1)^2 + 1$ bulunur.

Karenin dışında kalan yüzeyi saymazsak, cevap $2\binom{n}{2}^2 + (n^2+1)^2$ 'dir.

Olimpik Havuz

EN BÜYÜK DEĞER

Üçgenin kenar uzunlukları a, b, c ve bu kenarlara karşılı gelen açılar A, B, C olmak üzere

$A = \dfrac{abc}{4R}$ ve $\dfrac{a}{\sin A} = \dfrac{b}{\sin B} = \dfrac{c}{\sin C} = 2R$ eşitliklerini kullanırsak

$$\frac{AÇ}{R^3} = \frac{\frac{abc}{4R}(a+b+c)}{R^3}$$
$$= \frac{8R^3 \sin A \sin B \sin C \, 2R(\sin A + \sin B + \sin C)}{4R^4} \quad \text{elde ederiz.}$$
$$= 4 \sin A \sin B \sin C(\sin A + \sin B + \sin C)$$

Üçgende açıların sinüs değerleri negatif olmadığından aritmetik orta geometrik orta eşitsizliğini kullanabiliriz:

$$\frac{\sin A + \sin B + \sin C}{3} \geq \sqrt[3]{\sin A \sin B \sin C}$$

Ayrıca Jensen eşitsizliğinden

$$\frac{\sin A + \sin B + \sin C}{3} \leq \sin\left(\frac{A+B+C}{3}\right) = \sin 60° = \frac{\sqrt{3}}{2} \text{ olduğundan}$$

$$\frac{AÇ}{R^3} = 4 \sin A \sin B \sin C(\sin A + \sin B + \sin C) \leq \frac{4}{27}(\sin A + \sin B + \sin C)^4 \leq \frac{27}{4}$$

bulunur.

Eşkenar üçgende $\dfrac{AÇ}{R^3} = \dfrac{27}{4}$ olduğundan,

ifadenin alabileceği en büyük değer $\dfrac{27}{4}$ 'tür.

(Doğru çözüm gönderen okurumuz: Eyüp Amanvermez)

ALT KÜME

Cevap 21'dir.

$M = \{1, 2, 2^2, \ldots, 2^{10}, 3, 3\cdot 2, 3\cdot 2^2, \ldots, 3\cdot 2^9\}$ kümesi istenilen şartı sağlayan 21 elemanlı bir alt kümedir. Şimdi $|M| \geq 22$ olamayacağını gösterelim. M kümesinin elemanları $a_1 < a_2 < \ldots < a_{22}$ olsun.

$a_n < a_{n+1} < a_{n+2} < 2a_n$ olsaydı.

a_n, a_{n+1}, a_{n+2} üçlüsü içinde biri diğerini bölen iki eleman bulunamazdı.

Yani $a_{n+2} \geq 2a_n$ dir. Buradan

$a_4 \geq 2a_2 \geq 4, a_6 \geq 2a_4 \geq 8, a_8 \geq 2a_6 \geq 16$ ve bu şekilde devam edersek

$a_{22} \geq 2^{11} > 2011$ çelişkisi elde edilir.

Sonuç olarak M kümesinin en çok 21 elemanı olabilir.

CANKURTARAN EKİBİ
Ali Doğanaksoy,
Çetin Ürtiş,
Enes Yılmaz,
Fatih Sulak,
Muhiddin Uğuz,
Zülfükar Saygı.