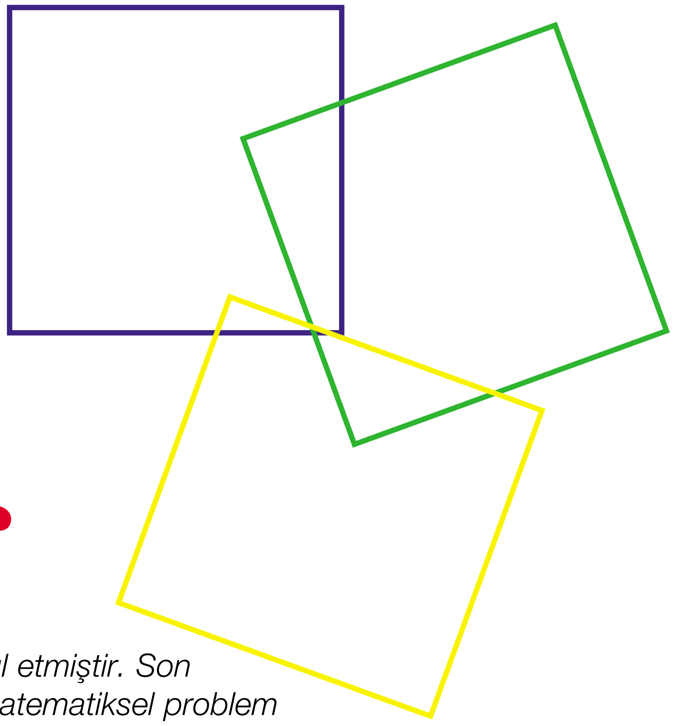
Doğal Sihirli Kareler

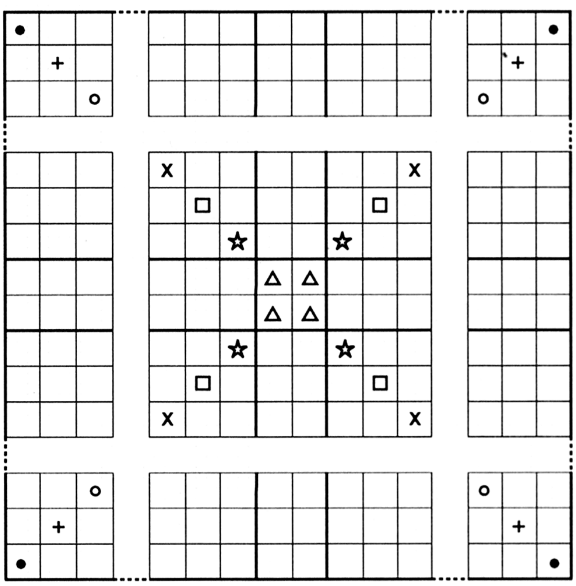


Sihirli kareler 2000 yıldır insanların kafasını meşgul etmiştir. Son 250 yılda matematikçiler sihirli karenin ciddi bir matematiksel problem olduğunu ortaya koymuşlardır. Birçok matematikçi çözümler önermişlerdir. Bu çözümlerin bazıları çok ilginç olmakla birlikte (örneğin Euler'in bir satranç atının hareketlerini izleyecek şekilde sayıları dağıtmasında olduğu gibi), çoğu kez ancak özel durumlar için geçerlidir ya da çözümler çok karmaşıktır. Bu yazıda oldukça basit ve genel bir çözüm yöntemi önerip, özel bir örnek üzerinde ayrıntılı olarak açıklayacağız.

Sihirli Kare Nedir?

Herhangi bir kareyi eşit aralıklarla n - 1 sayıda yatay ve düşey doğrular yardımıyla n^2 sayıda karelere bölelim. Böyle bir kareye n. dereceden kare diyeceğiz.

n. dereceden sihirli karenin tanımı:



Şekil 1: Karenin çerçevelerinin sıralanması veya derecelenmesi.

$\{1, 2, 3, \ldots, n^2-1, n^2\}$ sayılar kümesinin elemanlarını n x n kareye öyle yazalım ki, istenen sütun, satır veya köşegenlerdeki n sayının toplamı aynı sabit S sayısına eşit olsun. Bu sayıya Sihirli Sayı diyeceğiz. Bu sayının formülünü bulalım.

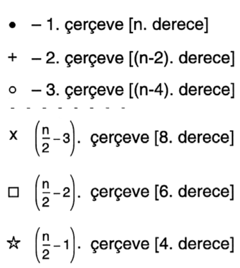
Sihirli karenin tanımına göre tüm hanelerdeki sayıların toplamı nS'e, diğer yandan ise $1 + 2 + 3 + \ldots + (n^2-1)+n^2$'ye eşit olacak, yani $nS = 1+2+3+\ldots+(n^2-1)+n^2 = n^2(n^2+1)/2$'ye eşittir. Buradan

$S=n(n^2+1)/2$ bulunur.

Kareler derecesine göre çiftli ve tekli kareler olarak isimlendiriliyor. Çift dereceden kareler ise 2 türlüdür: derecesi ikiye bölündüğünde çift sayı oluşturan kare, çiftli-çift kare ve derecesi ikiye bölündüğünde tek sayı oluşturan kare ise tekli-çift kare olarak isimlendireceğiz.

4, 8, 12, 16, 20, ... çiftli-çift sayılar
2, 6, 10, 14, 18, ... tekli-çift sayılar
3, 5, 7, 9, ... ise tek sayılardır.

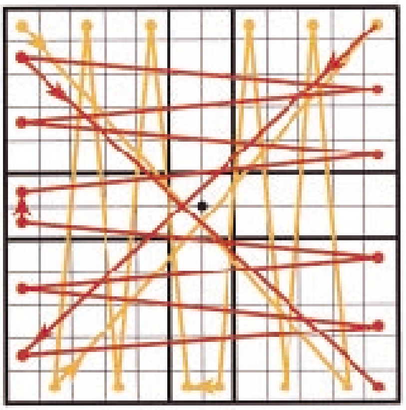
Bugün sihirli kare problemi, sonsuza dek istenilen n. derece için sihirli kare oluşturmaktan ibarettir. Şimdiye dek yazılan sihirli karelerin kuralları farklı olduklarından basit kuralla yazılmış kare mükemmel kare olarak isimlendirilir. Benim bulduğum kural ise bilinen en basiti olduğundan, bu algoritma ile oluşturulmuş sihirli kareye doğal sihirli kare adını verdim.



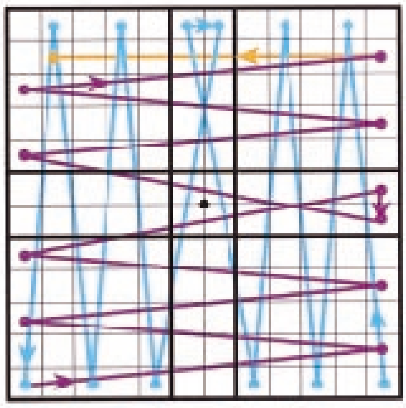
Doğal Sihirli Karelerin Algoritmaları

Bu algoritmayı açıklamak için 3 soruyu yanıtlamak gerekir: Ne, Nereye, Nasıl yazılmalıdır?

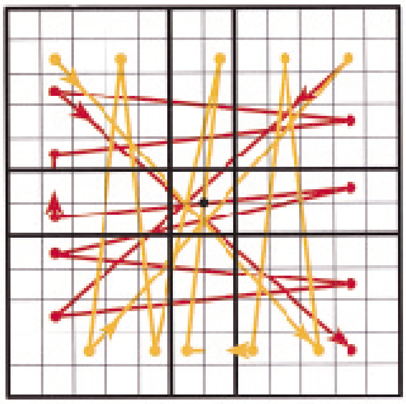
Doğal sihirli kare oluşturmak için $\{1, 2, 3, \ldots, n^2\}$ kümesinin sayıları



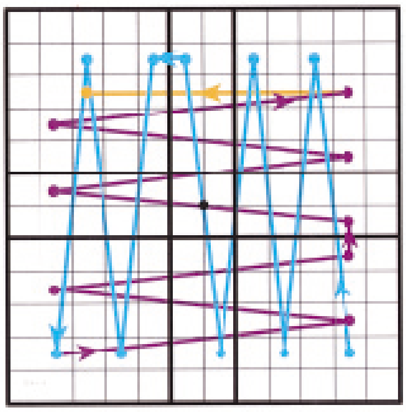
Şekil 2: α_1 ve β_1 grafları



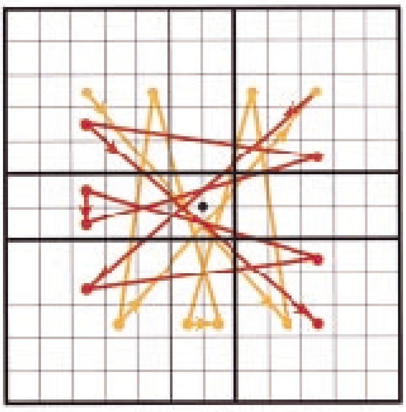
Şekil 2: γ_1 ve δ_1 grafları



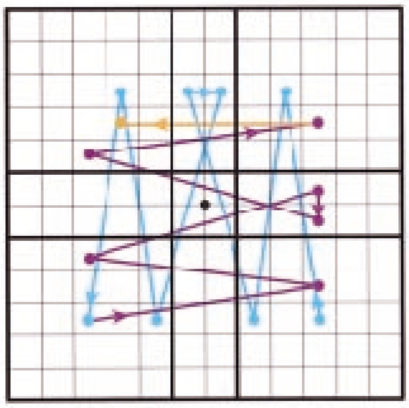
Şekil 2: α_2 ve β_2 grafları



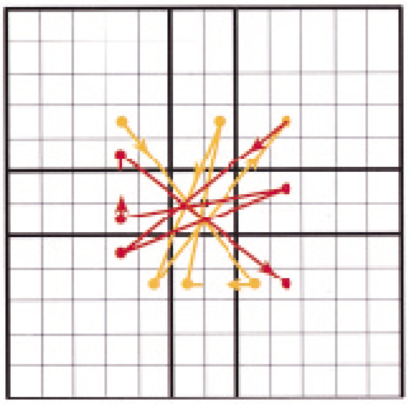
Şekil 2: γ_2 ve δ_1 grafları



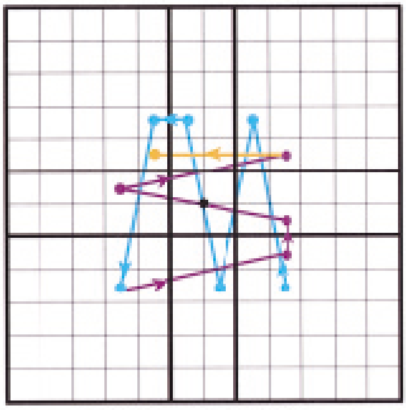
Şekil 2: α_3 ve β_3 grafları



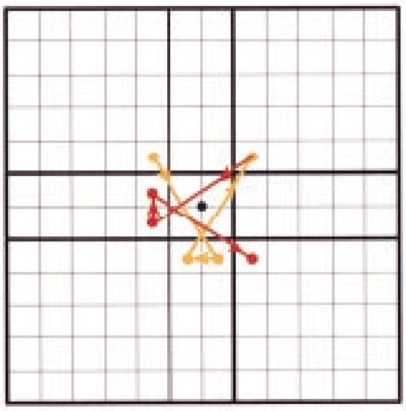
Şekil 2: γ_3 ve δ_3 grafları



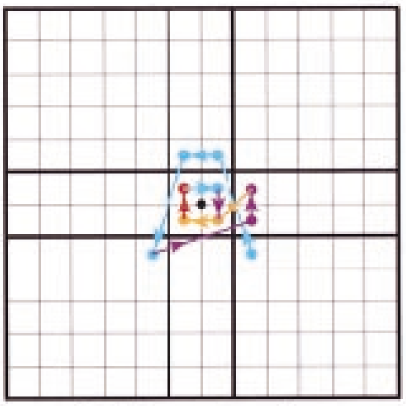
Şekil 2: α_4 ve β_4 grafları



Şekil 2: γ_4 ve δ_4 grafları



Şekil 2: α_5 ve β_5 grafları



Şekil 2: γ_5 ve δ_5 grafları; α_6 ve β_6 grafları; γ_6 ve δ_6 grafları.

(n/2) gruba ayrılır. Her grup ise 4 çeşit aritmetik dizi içerir. Her dizinin son terimi bir sonraki dizinin ilk terimi olur. Her 4. dizinin son terimi 1. dizinin 1. terimiyle aynıdır. Bu ifade tüm grupların dizileri için geçerlidir. İlk grubun dizi uzunluğu n, ikinci grubun dizi uzunluğu n-2, genel olarak k. grubun dizi uzunluğu n-2(k-1)'dir. Böylece son grubun, yani n/2. grubun dizi uzunluğu 2 olur. n. dereceden kare için 1. grubun 4 dizisini oluşturalım:

a_1 - 1, 2, 3, ..., n -1, n (1'er artar)

b_1 - n, 2n, 3n, ..., (n-1) n, n^2 (n'er artar)

c_1 - n^2, (n^2-1), (n^2-2), ..., [n^2-(n-1)] (1'er azalır)

d_1 - [n^2-(n-1)], [n^2-(n-1)-n], ..., [n^2-(n-1)-n(n-1)] (n'er azalır)

d_1 dizisinin son terimi 1'e, ondan bir öncesi ise (n + 1)'e eşittir.

Her grubun 1. dizisinin 1 terimi bir önceki grubun 4. dizisinin sondan bir önceki teriminin 1 fazlasına eşittir. Her grubun 1., 2., 3., ve 4., dizileri sırasıyla +1, +n, -1, -n olarak artar ve azalır. Örnek olarak n = 12 için grupları ve dizileri yazalım:

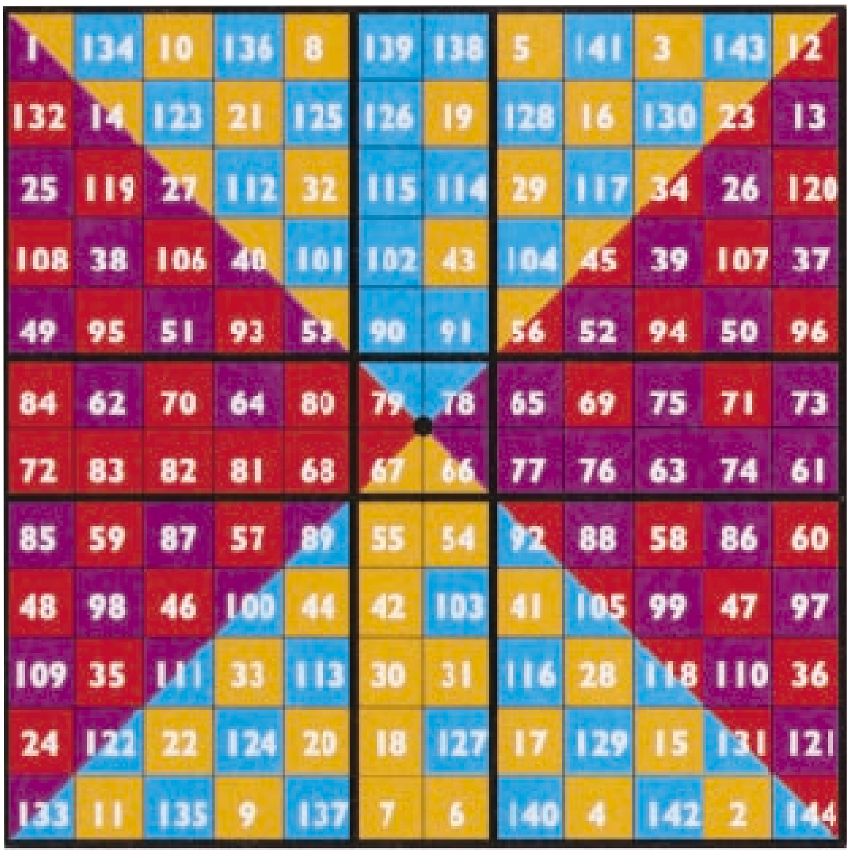
a1 - 1, 2, 3, ... , 11, 12
(1'er artar)
b1 - 12, 24, 36, ... , 132, 144
(12'şer artar)
c1 - 144, 143, 142, ... , 134, 133
(1'er azalır)
d1 - 133, 121, ... , 13, 1
(12'şer azalır)
a2 - 14, 15, ..., 22, 23
(1'er artar)
b2 - 23, 35, ..., 113, 131
(12'şer artar)
c2 - 131, 130, ..., 123, 122
(1'er azalır)
d2 - 122, 110, ..., 26, 14
(12'şer azalır)
a3 - 27, 28, ..., 23, 34
(1'er artar)
b3 - 34, 46, ..., 106, 118
(12'şer artar)
c3 - 118, 117, ..., 112, 111
(1'er azalır)
d3 - 111, 99, ..., 39, 27
(12'şer azalır)
a4 - 40, 41, 42, 43, 44, 45
(1'er artar)
b4 - 45, 57, 69, 81, 93, 105
(12'şer artar)
c4 - 105, 104, 103, 102, 101, 100
(1'er azalır)
d4 - 100, 88, 76, 64, 52, 40
(12'şer azalır)
a5 - 53, 54, 55, 56 (1'er artar)
b5 - 56, 68, 80, 92 (12'şer artar)
c5 - 92, 91, 90, 89 (1'er azalır)
d5 - 89, 77, 65, 53 (12'şer azalır)
a6 - 66, 67 (1'er artar)
b6 - 67, 79 (12'şer artar)
c6 - 79, 78 (1'er azalır)
d6 - 78, 66 (12'şer azalır)

Böylelikle, "Ne" sorumuzun yanıtı olarak grupları ve dizileri nasıl elde edeceğimizi gösterdik. Böyle gruplar ve diziler istenen çiftli-çift, tekli-çift ve tek dereceden karelerin hepsi için geçerlidir.

Şimdi ise "Nereye" sorusunu yanıtlayalım.

"Nereye" sorusunu yanıtlamak için ele aldığımız kareyi çerçevelere ayıralım: Çerçeveden kastımız dıştan içe varolan iç-içe (konsentrik) kare çerçevelerdir.

Şekil 1'de n. dereceden karenin çerçeveleri sırasına (derecesine) göre gösterilmiş ve aynı çerçevelerin köşegenlerindeki haneleri aynı sembollerle işaretlenmiştir. Kuşkusuz ki, çerçevelerin sayısı ve ele aldığımız grupların sayısı birbirlerine eşittirler, yani çerçeveler sayısı = gruplar sayısı = n/2.



Şekil 3: 12. dereceden Dogal Sihirli Kare

Örneğin 12 x 12'lik bir karenin 6 çerçevesi ve 6 grubu vardır.

Her gruptaki dizilerin elemanları sayısı uygun çerçevedeki haneler sayısına eşittir.

Görüldüğü gibi çerçeveler ve gruplar sayılarının eşitliği bizi şu noktaya götürür:

1. çerçeve hanelerine 1. grubun 4 dizisindeki sayılar yazılacak;

2. çerçeve hanelerine 2. grubun 4 dizisindeki sayılar yazılacak, vb.

Her Grubun Dizi Elemanları Çerçevenin Hanelerine Nasıl Yazılmalıdır?

Çerçevenin hanelerine sayıları yazmak için yönlü parçalardan oluşan graflardan faydalanmamız gerekiyor. Her çerçeveye grubun sayılarını tamamen yazdığımızda graf kapanır. Böyle grafa kapalı graf veya Euler devri denir. Örnek olarak 12. dereceden kare için Euler devirlerini gösterelim (Şekil 2).

Şekillerden görüldüğü gibi her grubun aynı dizisi aynı renkle ifade olunmuştur:

1. veya a dizisi turuncu
2. veya b dizisi kırmızı
3. veya c dizisi mavi
4. veya d dizisi ise mor olarak verilmiştir.

Şekilden görüldüğü gibi Euler devirlerindeki fark sadece "artı" işareti içerisindedir.

12. dereceden doğal sihirli kare için sunduğumuz bu graflar dizilerdeki sayıların çerçevelerdeki hanelere nasıl yazılacağını göstermektedir. Bunun için graflardaki yönlere ve renklere dikkat etmek gerekir.

Not: Tekli-çift dereceden doğal sihirli karelerin çerçevelerinin Euler devirleri çiftli-çift doğal sihirli karelerin çerçevelerine uygun Euler devirlerinden farklıdırlar. O yüzden bu konuyu bir başka yazıda açıklayacağız.

Şekil 3'de 12. dereceden doğal sihirli kare sunduğumuz algoritma ile yazılmıştır. Bu doğal sihirli karedeki hanelerin renklerini grafın renkleri ile karşılaştırdığınızda sihirli karenin nasıl yazıldığını kolaylıkla anlayabileceksiniz.

Asker Abiyev