## Pantalon, Dandelin Küreleri, Dama, Güvercin Yuvası ve Fasulye Çömleği Problemleri...

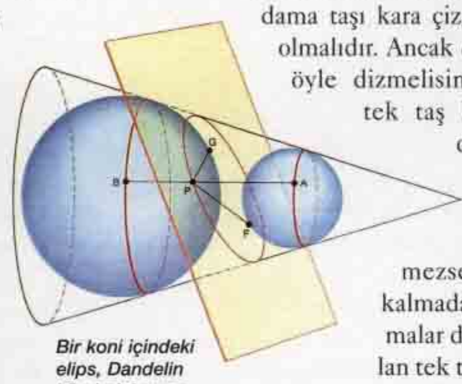
# Matematik Eğlenceleri

Ross Honsberger, Kanada'da Waterloo Üniversitesi'nde matematik öğretmektedir. 20 yıldır ilginç matematik problemleri topluyor. Bir süre önce onun halka açık ender konferanslarından birine gitmiştim. Bu tam bir matematik ziyafetiydi; tadı damağımda kaldı desem yeridir.

Honsberger, her fırsatta matematiğin ana kurallarını açıklar. Bir gün topoloji kurallarını açıklamak üzere, derse pantalonunu ters giymiş olarak geldi. Bize, onu çıkarmadan tersyüz edebileceğini söyledi. Pantalonunu çıkarmayacağını kanıtlamak için de 2,5 m'lik bir iple ayaklarını birbirine bağladı. Pantalonun her iki bacağını ipe doğru aşağıya çekti; öyle ki çok sevdiği kalp resimleriyle süslü külotu gözüktü. Öğrenciler bir abrakadabra yapmasın diye onu dikkatle izliyorlardı. Honsberger önce pantalonu ipin etrafında ters yüz etti; sonra kıvrıla kıvrıla pantalonun içine girdi. Bunda hile yapmadığının tanığı benim.

Honsberger, 19. yüzyıl matematikçisi Germinal Dandelin'in harika kürelerini anlattı. Dandelin, elipsin klasik ve modern tanımları arasında ilginç bir bağlantı bulmuştur. Eski Yunanlılar, elipsi bir düzlemin bir koniyi eğik olarak kesmesinden oluşan eğri olarak anlamıştı. Descartes zamanından beri elips, analitik geometriye göre şöyle tanımlanıyor: Elips, odak denilen iki noktadan uzaklıklarının toplamı sabit olan noktaların geometrik yeridir.

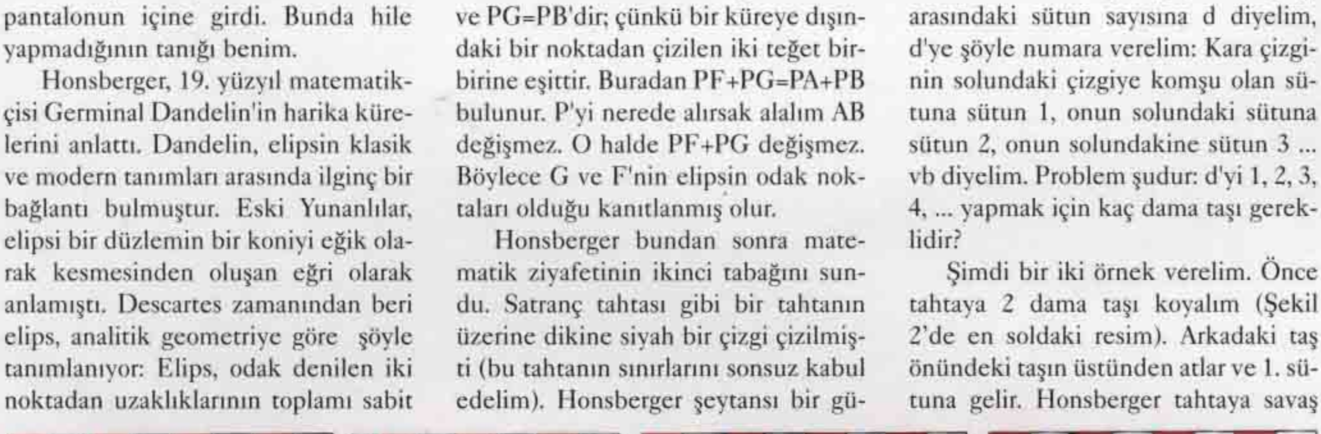
Honsberger saydam bir koni ve saydam bir düzlem kullanarak Dandelin'in şu dahiyane buluşunu açıkladı (Şekil 1): "Düzlem koniyi iki parçaya ayırmıştır. Dandelin bu iki parçadan herbirine birer küre koydu. Her küre hem koninin iç yüzüne, hem de düzleme teğetti. Düzlemle koninin kesiti bir elipsti. Sakın kürelerin düzleme değdiği G ve F noktaları bu elipsin odakları olmasın? Dandelin'in yüreği hopladı. Elips üzerinde rastgele bir P noktası alarak, koninin yanal yüzeyi üzerinde, P'den ve tepeden geçen bir doğru çizdi. Bu doğru kürelere A ve B noktalarında değdi. PF=PA ve PG=PB'dir; çünkü bir küreye dışındaki bir noktadan çizilen iki teğet birbirine eşittir. Buradan PF+PG=PA+PB bulunur. P'yi nerede alırsak alalım AB değişmez. O halde PF+PG değişmez. Böylece G ve F'nin elipsin odak noktaları olduğu kanıtlanmış olur.



*Bir koni içindeki elips, Dandelin kürelerini ayırır.*

Honsberger bundan sonra matematik ziyafetinin ikinci tabağını sundu. Satranç tahtası gibi bir tahtanın üzerine dikine siyah bir çizgi çizilmişti (bu tahtanın sınırlarını sonsuz kabul edelim). Honsberger şeytansı bir gülüşle "Şimdi sizi dama tahtası üzerinde hoplatarak biraz yoracağım." dedi, sonra da kuralları açıkladı: "Siyah çizginin sağına ona komşu olacak şekilde, 2, 4, 8, 20, ... dama taşı koyunuz (Şekil 2). Damadaki gibi yatay ya da düşey atlayarak üstünden atladığınız taşı alabilirsiniz. Son atlamadan sonra geriye tek bir dama taşı kalmalıdır ve bu dama taşı kara çizginin solunda olmalıdır. Ancak dama taşlarını öyle dizmelisiniz ki atlama tek taş kalana değin devam edebilsin Taşları uygun dizmezseniz, tek taş kalmadan önce atlamalar durur. Sona kalan tek taşın bulunduğu sütunla (düşey sıralanmış karelere sütun diyeceğiz) kara çizgi arasındaki sütun sayısına d diyelim, d'ye şöyle numara verelim: Kara çizginin solundaki çizgiye komşu olan sütuna sütun 1, onun solundaki sütuna sütun 2, onun solundakine sütun 3 ... vb diyelim. Problem şudur: d'yi 1, 2, 3, 4, ... yapmak için kaç dama taşı gereklidir?

Şimdi bir iki örnek verelim. Önce tahtaya 2 dama taşı koyalım (Şekil 2'de en soldaki resim). Arkadaki taş önündeki taşın üstünden atlar ve 1. sütuna gelir. Honsberger tahtaya savaş


*Değişik sayılardaki dama taşlarının diziliş biçimleri.*

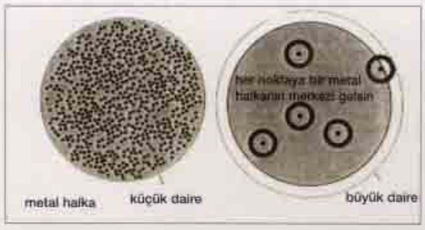
kazanmış bir komutan havasıyla şunu yazdı:

| d | dama taşı sayısı |
|---|---|
| 1 | 2 |

Bunun anlamı şuydu; iki dama taşıyla başlandığında sonuncu taş 1. sütunda kaldı.

Sonra tahtaya 4 dama taşı koyarak son taş kalana kadar atlama yaptırdı. Bu defa son taş 2. sütunda kaldı (Şekil 2'de soldan ikinci resim). Atlamalar şöyle oldu: Önce en sağdaki taş bir kere, sonra en alttaki taş iki kere atlar; en alttaki taş en sona kalmıştır ve 2. sütundadır. Honsberger, d'nin altına 2 ve dama taşı sayısı altına da 4 yazdı. Sonra tahtaya 8 dama taşı koydu; bu kez son taş 3. sütunda kaldığı için d=3 ve dama taşı sayısı=8 yazdı (Şekil 2'de soldan üçüncü resim). Atlamalar şöyleydi: Sırayla sağ üst, sağ orta ve sağ alt taşlar birer atlar. Sonra en alt taş önce yukarı, sonra sola atlar. Nihayet en üstteki taş önce aşağı ve sonra sola atlar. Kalan bu son taş 3. sütundadır. Honsberger sordu: "d'nin 4 olması için kaç dama taşı gerekir?". Birisi 16 dedi. Hayır, yanıt "en az 20" olmalıydı. [Bu 20 dama taşının (Şekil 2'de en sağ resim) nasıl atlaması gerektiğini düşünün. Çok zor. Ama bulursanız çok mutlu olacaksınız.] Honsberger sonra bu ziyafetin en acı biberli sosunu sundu: d'nin 5 olması için dama taşlarının sayısı kaç olmalıydı?" Herkes düşünüyordu. Sakın d=5 yapmak için birkaç milyon dama taşı gerekmesin? Sakın d ile dama taşı sayısı arasındaki ilişki şu süper üstel fonksiyonlardan birisi olmasın? Honsberger yanıtı söyleyince konuklar birbirine bakıp rahatsız bir biçimde gülümsedi: "Birkaç milyon dama taşı yetmez; birkaç milyar da yetmez. Çünkü kara çizginin sağına kaç tane dama taşı koyarsanız koyun, onları nasıl dizerseniz dizin, kara çizginin solundaki 5. sütunda bir dama taşını tek başına bırakamazsınız. Bu olanaksızdır. Bu problemin çözümsüz olduğu, Cambridge matematikçisi John Conway tarafından kanıtlandı".

Gelelim güvercin yuvasına. Bu basit fakat çok önemli kural şunu söyler: Elimizde 9999 güvercin yuvası ve 10 000 güvercin varsa, yuvalardan en az birinde 2 güvercin vardır. Güvercin yuvası kuralı, sonlu sayıdaki koleksiyonları inceleyen kombinasyon-permütasyon matematiğinde birçok teoremi kanıtlamada kullanılmıştır.



*Metal halka problemi*

"Şimdi size bu kuralın en garip uygulamalarından birini yaptıracağım" dedi Honsberger. "Yarıçapı 16 birim olan bir daire içine 650 nokta konulmuş. Size metal bir halka veriliyor; bu halkanın dış yarıçapı 3, iç yarıçapı 2 birim. Metal halkayı öyle koyunuz ki 650 noktadan en az 10'unu kaplasın", "Olanaksız" dedi bir öğrenci. "Ya bütün noktalar küçük bir alanda toplanmışsa?" Bir başka öğrenci kızdı: " O zaman sen de halkanı oraya koyarsın, akılsız!" Peki, gerçekten metal halkamızla en az 10 noktayı kapattığımızdan nasıl emin olacağız? Honsberger bir şekil çizdi (Şekil 3). "Diyelim ki bu 650 noktadan her birine, merkezi o nokta olacak şekilde bir metal halka konulmuş olsun.

Noktaların bazıları dairenin çevresine yakındır; bu durumda metal halka kaynak daire sınırlarını aşar. Fakat bütün noktalar dairenin içinde olduğundan ve halkanın yarıçapı en fazla 3 cm olduğundan metal halkaların hepsi, yarıçapı 13+6=19 olan büyük daire içinde olacaktır. Halkanın içinde kalan alan, yarıçapı 3 olan bir daireyle yarıçapı 2 olan bir dairenin alanlarının farkı kadardır. Bu da $5\pi$ yapar.

650 metal halka $5\pi \times 650 = 3250\pi$ kadar alan kaplar. Tabii ki bu alanın çoğu örtüşmelerden oluşur. Şimdi içteki dairenin hiçbir noktasının 9'dan fazla halkayla örtülmüş olmadığını varsayalım. O halde büyük daire içinde örtülen toplam alan, dairenin alanı olan $361\pi$'nin 9 katından, yani $3249\pi$'den fazla olamaz. Ancak $3249\pi < 3250\pi$ olduğundan bir x noktası en az 10 halka tarafından örtülmüş olmalıdır.

Honsberger "anladınız değil mi?" diye sordu. Kimseden ses çıkmadı. Honsberger şaşırmış gözüktü: "Demek anlamadınız?"

Başlangıçtaki problem bir metal halkanın en az 10 noktayı örtmesiydi, bir x noktasını 10 metal halka altında saklamak değildi. Akıllarımız birden ters çevrilmiş pantalona döndü.

"x noktasına bakınız. Eğer 10 metal halkayı kaldırıp merkezi x'de olan tek bir halka bırakırsanız, bu halka daha önceki 10 halkanın merkezlerini örter. Bu merkezlerin herbiri 650 noktadan biridir". Çözüm anlaşılmıştı. Herkes çok lezzetli bir yemek yemiş gibi zevkle yutkundu.

Ziyafetin temel yemeği bir Yunan vazosunda sunuldu. Honsberger sözü aldı: "Şu tarihsel çömlek içinde 75 beyaz ve 150 siyah fasulye var. Çömleğin yanında da büyük bir siyah fasulye yığını var (Şekil 4). Çömlekten rastgele iki fasulye alın. Eğer bu iki fasulyeden en az biri siyahsa (ya biri siyah, biri beyaz ya da ikisi de siyahsa) çömleğin yanındaki siyah fasulye yığınına bir siyah fasulye atın; elinizde kalan fasulyeyi, ister siyah ister beyaz olsun, çömleğe geri atın. Eğer çektiğiniz iki fasulyenin ikisi de beyazsa, bu kez de yığından bir siyah fasulye alıp çömleğe atın ve iki beyaz fasulyeyi bir kenara koyun. Her çekişte çömlekteki fasulye sayısı 1 azalacaktır. Sonunda çömlekteki fasulye sayısı 3, 2 ve nihayet 1 olacaktır. Çömlekteki sonuncu fasulye siyah mı, yoksa beyaz mı?

***Çömlekteki 75 beyaz ve 150 siyah fasulyeden sonuncusunun rengi nedir?***

Şaşırtıcı ve basit yanıt beyazdır. Bunun neden böyle olduğunu bulanlar ağızlarında "maklava" tadı duyacaktır, "maklava" matematikle yapılan bir çeşit baklavadır.

Dewdney, A.K., Scientific American, Mart 1991
Çeviri: Selçuk Alsan