

DUYURU

Değerli okurlarımız, önümüzdeki sayıdan itibaren Eğlence Havuzu ve Olimpik Havuz köşelerinde yer alan problemleri doğru çözenlerin isimlerini yayımlayacağız. Listede yer almak için çözümlerinizi, soruların yayımlandığı ayın ilk 15 günü içinde, sayfa başlığında verilen internet adresine göndermeniz gerekiyor. Okurlarımızdan gelen dikkate değer alternatif çözüm önerilerini de ayrıca yayımlayacağız.

KUM HAVUZU**100 KARINCA**

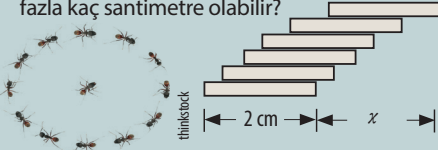
100 karınca, uzunluğu 1 m olan bir çubuğun üzerinde, rastgele aralıklarla, çubuğun uçlarından birine doğru yönelmiş olarak duruyor (hepsinin aynı uca yönelmiş olması gerekli değil). Bir anda karıncaların tümü, baktıkları yöne doğru 1 m/dakika sabit hızla çubuk boyunca yürümeye başlıyor. Her karınca, başka bir karınca ile karşılaşmadığı müddetçe, durmadan ve yön değiştirmeden yoluna devam ediyor. İki karınca karşılaştığında, ikisi de yönlerini değiştirip zıt yönde yürümeye devam ediyor. Çubuğun herhangi bir ucuna ulaşan karınca çubuktan aşağı atlıyor. Çubuğun üzerinde hiç karınca kalmaması en fazla ne kadar sürer?

**KARINCAYİYEN**

Hem siyah karıncayiyenin hem de kahverengi karıncayiyenin karşılaştığı bir karıncayı yakalayabilme olasılığı $1/2$ 'dir. Siyah karıncayiyen gün boyunca 2013 karıncayla, kahverengi karıncayiyen de 2012 karıncayla karşılaşmıştır. Siyah karıncayiyenin kahverengi karıncayiyenden daha fazla karınca yakalamış olma ihtimali nedir?

**EĞLENCE HAVUZU****DOMİNO KULESİ**

Uzunluğu 2 cm olan domino taşlarını şekildedeki gibi üst üste koyarak bir kule yapın. Kule yıkılmayacak şekilde, istediğiniz kadar taş kullanabilirsiniz. Bu durumda x mesafesi en fazla kaç santimetre olabilir?

**HALAY ÇEKEN KARINICALAR**

Her karıncanın gruplardan birinde yer alması ve her grupta en az bir karınca bulunması koşuluyla, 14 karınca iki halay grubunu kaç farklı şekilde oluşturabilir? Halayın çembersele formda ve karıncaların da "şahsiyet" sahibi olduğunu yani birbirleriyle özdeş olmadıklarını kabul ediniz.

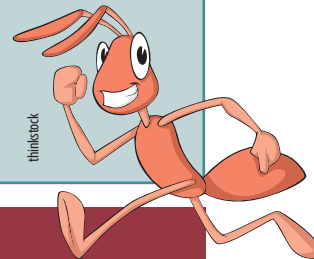
AZİMLİ KARINCA

Uzunluğu başlangıçta 1 metre olan ve istenildiği kadar esnetilebilen bir lastiğin bir A ucunda, bir karınca var. Karıncanın amacı diğer uca, yani B ucuna gitmek. Sizin amacınız ise karıncanın amacına ulaşmasını zorlaştırmak, mümkünse engellemek. Her hamlede karınca 1 santimetre yol alıyor. Hemen ardından da siz lastiği, uzunluğu 1 metre daha artacak şekilde esnetiyorsunuz. Elbette bu esnetme sırasında karıncanın da konumu değişiyor. Örneğin ilk hamlede karınca A noktasından 1 cm uzaklaştıktan sonra lastiğin uzunluğu 2 metreye çıkarılıyor ve hamle sonunda karınca A noktasından 2 cm uzaklaşmış oluyor, B noktasına olan uzaklığı ise 1,98 metreye ulaşıyor.

İkinci hamlede karınca 1 cm daha yürüyüp A noktasından 3 cm uzaklaşmış oluyor. Hamle sonunda lastiğin uzunluğu 3 m olduğunda ise karıncanın A noktasına uzaklığı 4,5 cm, B noktasına uzaklığı 2,955 metre oluyor.

Bu şekilde devam edilip de 100. hamle sonunda lastik uzunluğu 101 metreye ulaştığında, karıncanın B noktasına olan mesafesi 95,76 metre olur. 10.000 hamle sonra lastik uzunluğu 10.001 metre olduğunda karınca B noktasından 9022 metre uzaktadır.

Karıncanın B noktasına ulaşabilir mi?

**OLİMPİK HAVUZ****KİTAP ALIŞVERİŞİ**

10 arkadaşın her biri 3 farklı kitap satın alıyor. Daha sonra herhangi iki kişinin en az bir ortak kitap aldığını fark ediyorlar. En çok kişi tarafından satın alınan kitap k kişi tarafından satın alınmışsa, k sayısı en az kaç olabilir?

ÇEMBERDE EŞ UZUNLUKLAR

O merkezli bir çemberin üzerinde A ve B noktaları, $[AB]$ bir çap oluşturmayacak şekilde seçiliyor. $[OB]$ 'nin orta noktası ve A noktasından geçen doğru, çemberi ikinci kez C noktasında kesiyor. AB ve OC nin kesişim noktası D ; BC ve OA nın kesişim noktası F olmak üzere $|AF|=|CD|$ olduğunu ispatlayınız.

GEÇEN AYIN ÇÖZÜMLERİ

Kum Havuzu

LİSTE Birbirlerinden bağımsız olarak hazırlanan ve 1 ile 100 arasından rastgele seçilmiş 21 sayı içeren iki farklı liste olsun. Bu listelerde yer alan sayılardan en az birer tanesinin aynı olma olasılığı % 99'dan daha büyüktür. Bu nedenle listede verilen sayıların tek özelliği 21 adet farklı sayı olmasıdır.

SU TOPU TURNUVASI Üç takım arasında oynanan karşılaşmalar sonunda Türiş'in 14 puan, Gıyas'ın 9 puan ve Lukas'ın 8 puan olması için maç sonuçları şu şekilde olmalıdır:

Türiş 4 - Gıyas 1 (Türiş 10+4 puan; Gıyas 1 puan)

Gıyas 3 - Lukas 3 (Gıyas 5+3 puan; Lukas 5+3 puan)

Eğlence Havuzu

TRIELLO Havaya ateş ederse hayatta kalma ihtimali en yüksek olur.

İNCİLİ PRENSES Prens vazolardan birine 1 adet beyaz inci, diğer vazoya kalan tüm incileri koyar. İnciler bu şekilde yerleştirildiğinde prensin muradına erme şansı en yüksektir ve bu durumda ihtimal $\frac{1}{2} \cdot 1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{99}{200} \approx \frac{3}{4}$ olur.

GENELLEME: Prens vazolardan birine renkleri aynı olan 2 inci koyup, diğer vazoya kalan tüm incileri koyar. Bu durumda muradına erme ihtimali yaklaşık 0,62185 olur.

SALATALIĞIN SUYU 20 kg salatalığın % 99'u su ise kuru madde miktarı 0,2 kg olur. Kuru madde 0,2 kg olduğunda % 98 oranında su olabilmesi için 9,8 kg su gerekir. Dolayısıyla, toplam ağırlık 10 kg olur.

Olimpik Havuz

TAM KARE BÖLEN $n=1$ şartı sağlar. Genel olarak, n nin tek olduğu açıktır. n sayısının en küçük asal böleni $p \geq 3$ olsun. Bu durumda $EBOB(p-1, n) = 1$ olur. $2^d \equiv 1 \pmod{p}$ şartını sağlayan en küçük d pozitif tam sayısını alalım.

$(2^n+1)|(2^{2n}-1)$ olduğundan $2^{2n} \equiv 1 \pmod{p}$ ve Fermat teoreminden $2^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$ elde edilir. Bu durumda $d|EBOB(2n, p-1)$ yani $d|2$ bulunur. Sonuç olarak $p|(2^{2n}-1)$ yani $p=3$ olur. $n=3^k t$ ve $EBOB(t, 2)=EBOB(t, 3)=1$ olsun.

İddia: Pozitif r tam sayısı için $3^r | 4^n - 1$ ise $3^{r-1} | n$ olur.

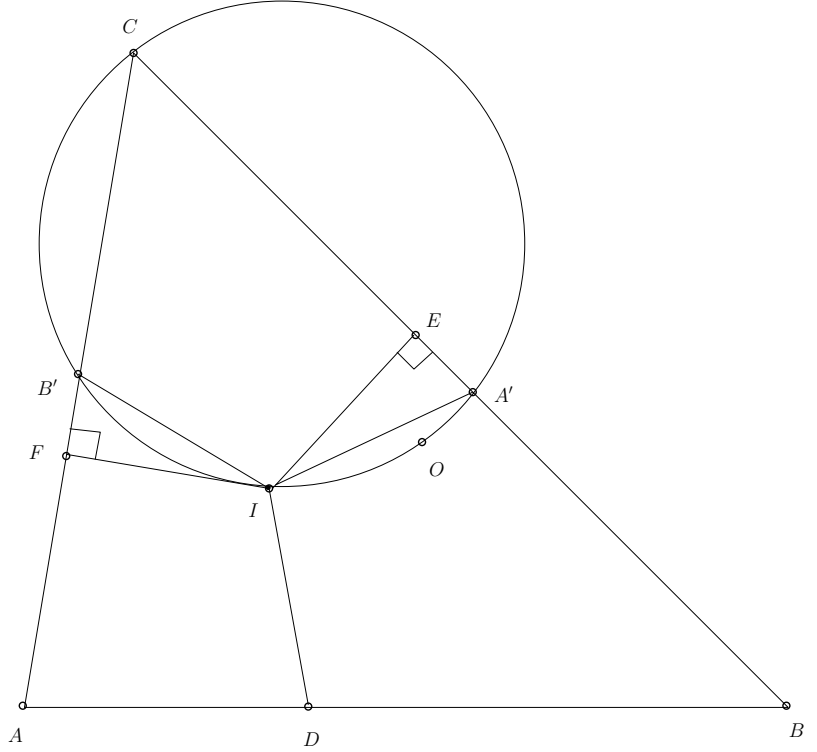
İddianın İspatı: r üzerinden tümevarım yapalım. $r = 1$ için iddia açıktır. $r = m$ için iddia doğru olsun. $r = m+1$ durumunda $3^{m+1} | (4^n - 1)$ için tümevarım şartını kullanırsak $3^{m-1} | n$ olur. $n = 3^{m-1} s$ alınır

$$(4^n - 1) = (4^{3^{m-1}s} - 1) = (4^s - 1)(4^{2s} + 4^s + 1) \dots (4^{2 \cdot 3^{m-2}} + 4^{3^{m-2}} + 1)$$

elde edilir. Eşitliğin sağ tarafındaki her terim 3 ile bölündüğünden $3^m | n$ elde edilir ve bu, iddiamızı ispatlar.

İddia olarak verdiğimiz sonucu kullanırsak $3^{2k} | (2^{2n}-1)$ ise $3^{2k-1} | n$ ve buradan $3^{2k-1} | 3^k t$ yani $2k-1 \leq k$ ve $k = 1$ elde edilir.

Şimdi $t \geq 1$ olsun. $q \geq 5$, t 'nin en küçük asal böleni olmak üzere $EBOB(n, q-1) | 3$ elde edilir. $2^e \equiv 1 \pmod{q}$ şartını sağlayan en küçük e pozitif tam sayısını alalım. $2^{2n} \equiv 1 \pmod{q}$ ve $2^{q-1} \equiv 1 \pmod{q}$ olduğundan $e | EBOB(2n, q-1)$ yani $e | 6$ bulunur.



Sonuç olarak $q|(2^e-1)$ yani $q = 7$ elde edilir. Ancak $2^n \equiv 1, 2, 4 \pmod{7}$ olduğundan $7, 2^n+1$ sayısını bölemez ve çelişki elde edilir.

Yukarıdaki bilgiler sonucunda sadece $n=1$ ve $n=3$ değerlerinin sorudaki şartı sağladığı görülür.

DAR AÇILI ÜÇGENDE NOKTALAR BC ve AC kenarlarının orta noktaları A' ve B' olsun. D, AB üzerinde $|AB'| = |AD|$ olacak şekilde bir nokta ise $|BA'| = |BD|$ olur. Buradan $|B'I| = |ID|$ ve $|A'I| = |ID|$ elde edilir. Dolayısıyla $|A'I| = |IB|$ olduğu görülür.

I noktasından BC ve AC kenarlarına indirilen dikmelerin ayakları E ve F olsun. Kolayca görüleceği üzere IFB' ve IEA' üçgenleri eşittir. Genelliği bozmadan $|AC| \leq |BC|$ olsun. Bu durumda $|AC| \leq |AB| \leq |BC|$ olur. Buradan $|AB'| = |AD|$ olduğu için $|CF| \leq |DB|$ bulunur. Dolayısıyla $|CE| \leq |EB|$ olur ve sonuç olarak $|CE| \leq |CA'|$ elde edilir.

Benzer şekilde $|CF| \geq |CB'|$ olduğu görülür. Yukarıda bulduğumuz eş üçgenleri de kullanarak

$$m(\widehat{EIF}) = m(\widehat{A'IB'}) = 180^\circ - m(\widehat{C})$$

olduğu, diğer bir deyişle $CB'IA'$ dörtgeninin çembersel olduğu bulunur. $CB'OA'$ dörtgeninin çembersel olduğu kolayca görüldüğünden $B'IOA'$ dörtgeninin çembersel olduğu gösterilmiş olur.

CANKURTARAN EKİBİ

Ali Doğanaksoy,
Çetin Ürtiş,
Enes Yılmaz,
Fatih Sulak,
Muhiddin Uğuz,
Zülfükar Saygı.

