Yarım Daire

Esirlerin bulundukları noktalar X_1, X_2,...,X_n olsun. Ai, Xi'den saatin tersi yönde π radyanlık (180°) yay olsun. X_j'nin Ai'de bulunmama $(i \neq j)$ olayı Ei ise, E_i'nin olasılığı $P(E_i)=(1/2)^{n-1}$dir (çünkü A_i yarımdairedir). E_i olayları karşılıklı dışlayıcı olduğundan toplam olasılık

$$\sum_{i=1}^{n} P(E_i) = (\frac{1}{2})^{n-1}$$

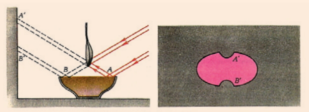
dir. n=12 için aranan olasılık $P=12/2^{11}$=% 0.58'dir (binde 58).

Dört Kız

Valya-mavi, Galya-yeşil, Anya-beyaz ve Nadya-pembe.

Yansıma

Duvardaki gölge sağdaki gibi olur.



Kareyi Karelere Bölmek

Kenarı $1/2^k$ olan 2^{k-1} kare vardır. k ne olursa olsun $(1/2^k).4.2^{k-1}$= 2'dir. k=1993 olduğunda

$(1/2^k).4.2^{k-1}$= 2.1993 yapar. Demek ki bu pilot karelerin çevrelerinin toplamı 1993'ü geçebilir.

Suçlu Kim?

Andrey doğru söyleseydi, (yani camı Viktor kırsaydı), Viktor yalancı, Sergey doğrucu olurdu. Demek çözüm bu değil (tek doğru olacak). Viktor doğru söyleseydi, Andrey ve Sergey yalancı, Yuri doğrucu olurdu; iki doğrucu olamaz. Çözüm bu değil. Yuri doğrucu olsaydı diğer üçünün yalancı olması gerekirdi. O zaman Viktor yalancı olacağından camı Sergey kırmış olamayacaktı; fakat Sergey, Victor yalancı derken doğrucu olurdu; yine iki doğrucu (Sergey ve Yuri) oldu; bu da olamaz. Demek doğrucu Sergeydi. Viktor yalancıydı, camı Sergey kırmamıştı. Andrey yalancıydı, camı Viktor kırmamıştı. Yuri yalancıydı, camı Yuri kırmıştı.

İki Mıknatıs

İki mıknatısı T biçiminde bir araya getirirsiniz. Mıknatıslı çubuğun ucu mıknatıslı olup ortası değildir. Çubuklar birbirine yapışmazsa yatay, yapışırsa dikey çubuk mıknatıstır.

Konik Üzerinde 6 Sentroid

Carnot teoremi gereğince (*Bkz. H.W. Eves, A Survey of Geometry (revised edition, Allyn and Bacon, 1972, pp. 256 and 262*) 6 sentroidin bir konik üzerinde bulunabilmesi için şu şart gereklidir:

x(2x+y)z (2z+u)v(2v+w)= w(2w+v)u(2u+z) y(2y+x).(1).

Ceva teoremi gereği *xzv=wuy*'dir. Bu nedenle (1) basitleştirilebilir: *xzw+zvy+vxu-* (wvx+uyv+ywz)= 0 veya *(x-y) (z-u) (w-v)*= 0. Bu ise *P* noktasının en az bir açıortay üzerinde bulunması demektir.

(*AP, BP* ve *CP* doğruları *a*, *b* ve *c* kenarlarını *(x,y)*, *(z,u)* ve *(v,w)* gibi 6 parçaya ayırmıştır).

(Carnot teoremi: *n*. dereceden bir *L* eğrisi bir *ABC* üçgeninin kenarlarının *n* noktada keserse (eğri üçgenin tepelerden geçmeyecek), *AB* kenarı C_1, ...,C_n; *BC* kenarı A_1,..., A_n ve *CA* kenarı B_1, ..., B_n noktalarında kesilmişse, 3n adet basit kesirin çarpımı +1 yapar:

$$\frac{\overrightarrow{C_iA}}{C_iB}, \frac{\overrightarrow{A_iB}}{A_iC}, \frac{\overrightarrow{B_iC}}{\overrightarrow{B_iA}}, \ i = 1...,n$$

(R. Carnot, Geometrie de position, Paris, 1803)

l bir doğru ise Menelaus teoremi elde edilir (*Bkz Geometrinin Gizli Dünyası, David Wells, çeviren Doç. Dr. Selçuk Alsan, Sarmal Yayınları, 1998*).

Ceva teoremi: Bir ABC üçgeninde BC, CA ve AB kenarları üzerinde sırasıyla A_1, B_1 ve C_1 noktaları bulunsun. AA_1, BB_1 ve CC_1 doğrularının (Ceva doğruları) bir noktada kesişmesi için

$$\frac{AC_1}{C_1B} \cdot \frac{BA_1}{A_1C} \cdot \frac{CB_1}{B_1A} = 1$$

olmalıdır. Bu teorem İtalyan G. Ceva tarafından 1678'de bulunmuştur. Ceva teoremi, Menelaus teoreminin dualidir (Dual ve Ceva teoremi için bkz. geometrinin Gizli Dünyası, David Wells, çeviren Doç. Dr. Selçuk Alsan, Sarmal Yayınları, 1998).

Ceva teoremi poligon için genellenebilir. Düzlem bir poligon içinde bir 0 noktası verilmiş olsun. Poligonun köşelerinin (A_1,..., A_{2n-1}) sayısı tek olsun. OA_1, ..., OA_{2n-1} doğruları poligonun A_1,...,A_{2n-1} köşelerinin karşısındaki kenarları an, ..., a_{2n-1}, a_1, ..., a_{n-1} noktalarında kessin. Bu durumda:

$$\frac{A_1a_1}{a_1A_2} \cdot \frac{A_2a_2}{a_2A_3} \cdots \frac{A_{2n-2}a_{2n-2}}{a_{2n-2}A_{2n-1}} \cdot \frac{A_{2n-1}a_{2n-1}}{a_{2n-1}A_1} = 1$$

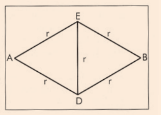
dir.

Üçgen+Kare

ACD ve BEC üçgenlerinde CD=20M ve CE=20N. CD+CE= 2(OM+ON). CBD_1E_1 karesini çizelim. $\Delta ABD_1 = \Delta CBD$ (iki kenarları ve bu iki kenar arasındaki açıları eşit). O halde $CD=AD_1$. ACD_1 üçgeninde AC=b ve $CD_1=a\sqrt{2}$. Bu üçgen bir doğru haline dejenere olunca AD_1 maksimum olur. ABD_1'in doğru halini almasıyla, AC, D_1C'nin devamı üzerindedir; ACB açısı= 180°-45°=135° ve AD_1 maksimum olur; $AD_1=a\sqrt{2}+b$'dir. Benzer olarak AC üzerine bir kare kurarsak kenar olarak ACB açısı= 135° iken max $(BE_2)=a+b\sqrt{2}$ olur.

$$\text{Max(OM+ON)}= \frac{1+\sqrt{2}}{2}(a+b)\text{'dir.}$$

Cin Pergeli



Cinnoş A merkezli, $r\sqrt{3}$ yarıçaplı bir C dairesi çizer. A sarı olsun. C dairesi tamamen sarıysa mutlaka aralarındaki uzaklık r olan iki sarı nokta vardır.

C dairesi içinde B noktası yeşil olsun. B tepe ve r kenar olmak üzere AED ve DEB eşkenar üçgenleri çizilir.

-E veya D yeşil veya sarı ise bahis kazanılmıştır.

-Hem E, hem D kırmızı ise bahis yine kazanılmıştır.

Demek ki aralarındaki uzaklık r olan aynı renkten iki nokta daima bulunabilir.

Projektörün Taradığı Alan

a) Projektörün aydınlattığı toplam alan = α açılı daire kesmesinin alanı

$$\pi R^2 \cdot \frac{\alpha}{360°} = 3 \cdot 100^2 \cdot \frac{120}{360} = 10\ 000\ m^2$$

b) AnB daire parçasının (segment) alanı=AnBO daire kesmesinin alanı-AOB üçgeninin alanı

$$\pi R^2 \cdot \frac{\alpha}{360°} - \frac{R^2}{2}\sin\alpha$$

AOB Üçgeninin alanı

$$\frac{R \cdot R \cdot \sin\alpha}{2} = \frac{R^2}{2}\sin\alpha$$

$$\sin 120° = \sin 60° = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

AnB alanı=

$$10\ 000 - \frac{10\ 000}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 5670\ m^2$$

En az aydınlanan yüzey/toplam aydınlanan yüzey ≅ % 50. (π radyan olarak verilirse daire parçasının alanı

$$S = \frac{R^2}{2}(\alpha - \sin\alpha).$$

2 saat

İki saat arasında 1 saatte 3 dakika fark var. O halde 60 dakika fark oluşması için 20 saat gereklidir. Sol saat 20 dakika ileri gitmiş, sağ saat 40 dakika geri kalmış olmalıdır. O halde zaman sabah 6'yı 40 geçiyordur. Bundan 20 saat geri gidelim, saatler bir gün önce 10'u 40 geçe kurulmuştur.

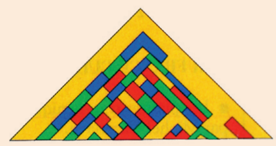
Bir Satranç Turnuvası

Hayır, oynamadılar. İspatı: Turnuvaya 7 kişi katılırsa 21, 8 kişi katılırsa 28 ve 9 kişi katılırsa 36 oyun oynanır. (21=1+2+3+4+5+6,28=1+2+3+...+7 vb) (21, 28, 36,... üçgen sayılardır). Turnuvada 23 oyun oynandığına göre oynayanların sayısı 7'den büyük ve 8'den küçüktür (21<23<28). Bu sayıya Jenya ve Saşa'yı da katarsak anlaşılır ki turnuvaya 8 veya 9 kişi katılmıştır. 8 kişiyse 28 oyun oynanır; 23 oyun oynandığından 5 oyun eksiktir. 9 kişiyse 36 oyun oynanır; 23 oyun oynandığından 13 oyun eksiktir. Jenya ve Saşa aralarında oynamış olsalardı oynanmamış oyun sayısı çift olurdu. Oysa 5 veya 13 tektir. O halde Jenya ve Saşa karşılıklı oynamamışlardır.

Yedi Bela Gezegeni

$(x+y)^7-x^7-y^7=7x^6y+21x^5y^2+35x^4y^3+35x^3y^4+21x^2y^4+7xy^6=7xy(x+y)(x^2+xy+y^2)^2.xy$ (x+y)'nin 7'ye bölünmediğini varsayarsak x^2+xy+y^2, 7^3 ile bölünebilmeli, (7^3'ün karesi 7^6; birde 7xy'nin 7'si var; 7^7 yapar). x=1 verirsek: $1+y+y^2= 7^3$= 343. Bu denklemin kökleri y_1=18 ve y_2=-19'dur. Aranan x=1 ve y=18'dir. Sağlayalım: $(1+18)^7-1^7-18^7$=n. 7^7 olmalı. Buradan n= 342 bulunur; yani $(x+y)^7-x^7-y^7$, 7^7 ile, x=1 ve y=18 olmak koşuluyla bölünürse 342 çıkar. Sınavdan sonra 7 güzel kız Cin Ruhi'yle yedişer kere dansetti.

İki Renk Teoremi



1) Tek bir doğru (n=1) iki ülkeyi ayırsın. Ülkelerin biri mavi, biri kırmızı olabilir.

2) n doğru için haritayı yalnız kırmızı ve maviyle boyayabildiğimizi varsayalım.

3) Haritaya (n+1) doğruyu ekleyelim. Harita P ve Q gibi iki bölüme ayrılır. P'nin renklerini aynı bırakalım. Q'nun renklerini değiştirelim; öyleki maviler kırmızı, kırmızılar mavi olsun. O zaman haritanın uygun şekilde boyandığı görülür. (Örnek: Bir kırmızı, bir mavi olarak 10 şeriti altalta yapıştırın. Bu 10 şeriti ortadan dikey bir çizgiyle ikiye bölün. Sağ yarıyı aynen bırakın. Solda mavileri kırmızı, kırmızıları mavi yapın. İşte ispat).

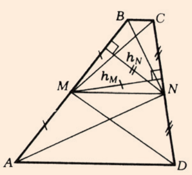
Bir Pembe Dizi

Bir yılda ekrana geliş sayısı bir önceki yıla göre % 40 artıyor demek, 7/5 kat artıyor demektir; % 40 azalıyor demekse 3/5 kat azalıyor demektir (100 ve 140'ı ve 100 ve 60'ı düşünün; 20 ile bölünürse 7/5 ve 3/5 verir). O halde 1988'de ekrana geliş sayısı n ise 1989'da $n \cdot \frac{a}{5}$, 1990'da $n \cdot \frac{a}{5} \cdot \frac{b}{5}$, 1991'de $n\cdot\frac{a\cdot b\cdot c}{5\cdot 5\cdot 5}$ ve 1992'de $n\cdot\frac{a\cdot b\cdot c\cdot d}{5\cdot 5\cdot 5\cdot 5}$ kere ekrana gelmiştir; a,b,c ve d 7 veya 3 tür (7/5 ve 3/5 den dolayı). n tam sayı olduğundan ve 1992'de ekrana geliş sayısı da tam sayı olduğundan,

n, 5x5x5x5=54=625 ile bölünebilmelidir. Diğer yandan bir yılda ekrana geliş sayısı en fazla 366x2= 732 olabilir (günde en çok 2 kere). n<732 olması ve n'in 625 ile bölünebilmesi için n=625 olmalıdır. 1988'de ekrana geliş sayısı 625.1989 da ekrana geliş sayısı 625.3/5= 375 veya 625.7/5= 875 dir. Bir yılda en fazla 732 ekrana geliş olası olduğundan 1989'da ekrana geliş sayısı 375.3/5= 225 veya 375.7/5= 525 olabilir. 225 olamaz; çünkü o zaman üç yıllık birikim 625+375+225=1225 olurdu ve seyirciler 1990'da 1230. ekrana gelişi seyredemezdi; o halde 1990 da ekrana geliş sayısı 525. 1991 de ekrana geliş sayısı 525.7/5= 735 olamaz; çünkü 735>732. O halde 1991'deki sayı 525.3/5=315. 1992 sayısı ne? 315. 3/5=189 veya 315.7/5= 441. 441 olsaydı en az 221 gün gerekirdi ve 221+148=369>366; bu mümkün değil. O halde 1992 sayısı 189. Toplam ekrana geliş sayısı

625+375+525+315+189= 2029 ekrana geliş.

Savunma Hattı



AB ve CD nin orta noktaları M ve N olsun. M'nin CD'ye uzaklığına hm ve N'nin AB'ye uzaklığına h_N diyelim. AB=a ve CD=b olsun. BC ve AD'nin paralel olmaları için her ikisinin de MN'ye paralel olmaları gerekir. Bu ise MNB ve MNC ile MNA ve MND üçgenlerinin alanlarının eşit olmasını gerektirir. MNA= MNB= 1/2 . AB/2. h_N= a.h_N/4 ve MNC=MND= b.h_M/4= ab/8 (Çünkü hM=a/2). BC ve AD'nin paralel olmaları için hN=b/2 olması gerekir. Bu ise CD çaplı dairenin AB'ye teğet olması demektir.

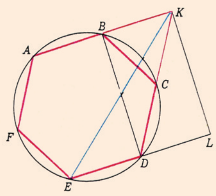
Kırmızılar Oyunu

Anlamak için çok konsantre olalım. Formülü bulmak için 8x8'lik bir satranç tahtası düşünelim. a ve b sütunlarını (soldan 1. ve 2.) kırmızı yapalım. Şimdi de 8, 7 ve 6 sıralarındaki (üstten 1., 2. ve 3.) fişleri ters çevirelim. 8a, 7a, 6a, 8b, 7b ve 6b İKİNCİ KEZ çevrilecekleri için kırmızı iken yine siyah olacaklardır. Buna karşı 8c, 8d, ...,8h, 7c, 7d, ..., 7h, 6c, 6d,..., 6h kırmızı olacaktır. Şimdi kırmızıları sayalım. Kolayca görülür ki kırmızı sayısı (2x5)+(3x6)=28 dir (sayabilirsiniz). Demek ki (2x5) ve (3x6) lık dikdörtgenler kırmızılaşmış, sol üst köşedeki (2x3)'lük dikdörtgen kırmızıyken siyaha dönüşmüştür. Şimdi 100 sıradan alt L sırayı ve 50 sütundan sağ C sütunu çevirdiğimizi düşünelim. Kırmızı sayısı L (50-C)+C (100-L) olacaktır. Buradan 50L+100C-2CL= 1996. C=25+x ve L=50 +Y yazalım. XY= 252 bulunur. Burada-25<x<25 ve -50<Y<50dir. Olası 16 X,Y çiftinden ters çevirmeleri minimum yapar. X=-6 ve Y= -42'dir. Buradan C=19 ve L=8. Yani 19+8=27 kere çevirme yapmanız gerekir. 8(50-19) + 19 (100-8)= 1996.

Borudaki Su

Çakmağınızla boruyu ısıtırsınız. Isınan su, aktığı yönde boruyu da ısıtacaktır.

√7



B ve D'yi birleştirelim. BDK diküçgeninde BK=1 ve DK=2.

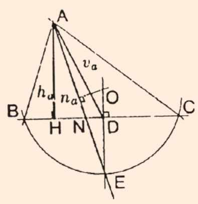
$$BD = \sqrt{DK^2 - KB^2} = \sqrt{3}$$

ELK diküçgeninde

EL=2DE=2 KL=BD= $\sqrt{3}$

$$EK = \sqrt{EL^2 + KL^2} = \sqrt{4+3} = \sqrt{7}$$

Yırtık Askeri Harita



AHN üçgenini çizin. A noktasından V_a (kenar ortay) kadar alarak D'yi bulun. D'den çıkılan dikmenin açıortayı kestiği E noktasını bulun. AE'nin orta dikmesi ile D'nin uzantısını O'da kesiştirin. O merkezli ve OE yarıçaplı çemberin HND doğrusunu kestiği noktalar B ve C'dir.

5 Kağıt

Kağıt parçalarının sayısını veren formül 4n+1'dir. (1, 4x1+1=5, 4x2+1= 9, 4x3+1= 13 ...). 1980 sayısı 4n+1'e uymadığından dolayı 1980 parça elde edilemez.

İki Sayı

Sayılar ab ve ba ve a>b olsun. (10a+b)- (10b+a)= 9 (a-b). Şimdi 9 (a-b) tam kare olmalıdır. Bunun için a-b=4 olmalıdır. Buradan a=7 ve b=3 bulunur. Aranan sayılar 73 ve 37'dir. 73-37=36=6^2. (a-b=1 de çözüm gibi görülebilir; çünkü 9 (a-b)= 9.1= 3^2 dir; ama a-b=1 olamaz; ab ve ba asal olduğundan, a da, b de tek olmak zorundadır; fakat iki tek sayının farkı en az 2'dir; iki tek sayının farkı 1 olamaz. Tek çözüm a-b=4 çözümüdür).

1,9,8 ve7 ile bir kare sayı

$$-1+\sqrt{9}-8+7=1$$

$$1+\sqrt{9}(8-7)=4$$

$$1+9-8+7=9$$

$$1^9+8+7=16$$

$$1+9+8+7=25$$

$$-1-(\sqrt{9!})+8\cdot 7=49$$

$$-1+9+8\cdot 7=64$$

$$-1(\sqrt{9!})+87=81$$

Hesap Makinesinin Fiyatı

344N= 10101A+100. (747574) örneğini alalım. A=74'dür. (10101.74)+100= 747574 yapar; yani A[A+1] A'yı yazmanın başka bir yolu 10101 A+A yazmaktır).

Bu ifadeyi mod 43'e göre yazalım. $344N \equiv 0$ (mod 43)[çünkü 344 sayısı 43'ün tam katıdır: 43x8= 344]. 10101 A= -4A (mod 43) [çünkü 235x43= 10105 ve $10101A \equiv -4A$ (mod 43)]. Buradan 0=-4A+100 ve buradan da -4A= -100 ve A=25. Fakat A çift olmak zorundadır (neden?). A= 68'dir. N= 686968/344= 1997. 1997 kişi hesap makinesi alıp 344x1997= 686968 frank ödemişti.

İşte Kentler, İşte Olasılık

% 100. Bu 3 kentten geçen düzlemin dünyayı kestiği daireyi düşünelim. Bu dairenin çevresi en fazla 25 000 mildir (dünyanın çevresi kadar). Kentlere A, B ve C diyelim. A ve B arası 9000 mil ve B ve C arası 9000 mil olursa A ve C arası 0-7000 mil arasında değişir. Crupnik kenti, Aardvosk kentine Baltimore'dan daha yakın olmak zorundadır.

Akıl Daima Yener

Lüsya bir düğme alarak en son (1977) kareye koyar. Şimdi sonuncu kareyi saymazsak geriye 1976 kare kalmıştır. Lüsya, Saşa'nın gittiği kare sayısının daima iki katı kadar sağa gider ve son düğmeyi Lüsya koyar, Saşa kaybeder. Acaba neden böyle oluyor. Düşünün, bulamazsanız bu yanıta bakın. Saşa a, b,c, d kadar sağa gitsin Lüsya 2a, 2b, 2c ve 2d kadar sağa gidecektir.

Toplayalım:

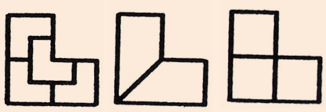
a+b+c+d+2a+2b+2c+2d=3 (a+b+c+d). 1976 3 ile bölünürse geriye 2 kalır. Saşa oynadıktan sonra geriye 1 kare kalır ve o kareye Lüsya düğmesini koyar ve kazanır.

Muhallebi ve Komposto

Sıvıların soğuması yüzeylerindeki buharlaşmaya bağlıdır. Muhallebinin yüzeyinde zar oluşarak buharlaşmayı engeller. Ayrıca muhallebi koyu olduğundan içinde sıvı akımları (konveksiyon) azdır. Bu nedenle muhallebi daha sıcaktır.

L Biçimi Şekiller

1)



2) 3'den büyük asal sayılar için çözüm bulunamamıştır; fakat bunun olanaksız olduğu da ispat edilememiştir. 5 için de çözüm yoktur.

3) n=m^2, n=2m^2 ve n= 3m için daima çözüm vardır. Ancak bunlar dışında da çözüm vardır. Martin Gardner n=10 ve n=14 için çözüm olduğunu gösterdi.

Atlar Piyonları Temizliyor

a) h3-f2-h1-g3-e4-db-b7-a5-c6-d4-f3-e1-g2-f4-d5-c7-a8.

b)hl-f2-dl-b2-a4-b6-a8-c7-e8-g7-h5-f6-d5-c3-e4-d6-b7-a5-c6-d4-b3-a1-c2-e1-g2-h4-f3-e5-g6-h8.

Üçgen Sayılar

$(2k+1)^2n+T_k=[(2k+1)^2(m^2+m)+k(k+1)]/2$

$=[(2k+1)^2m^2+(2k+1)^2m+k(k+1)]/2$

$=[(2k+1)m+k][(2k+1)m+k+1]/2$

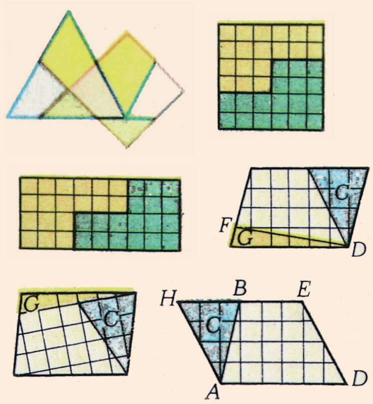
$=[k(k+1)/2]$

Burada k=(2k+1)m+k'dır.

O halde $(2k+1)^2n+T_k$ sayısı da üçgendir.

(N=K(k+1)/2 sayısı üçgen olduğu için).

Şekillere Kılık Değiştirin



Pullu Mantıkçılar

a) Birinci turda C, karşısında 4 kırmızı ya da 4 yeşil görseydi, kendi alnındaki 2 pulun da görmediği renkten olduğunu anlardı.

b) Fakat C, A'da iki yeşil, B'de iki kırmızı görseydi, kendi alnında bir kırmızı, bir yeşil olduğunu anlardı; çünkü C'nin alnında 2 kırmızı veya 2 yeşil olsaydı, alınlara yapıştırılan aynı renkten pul sayısı 4'e ulaşırdı ve (a) daki mantıkla A veya B kendi alnındaki 2 pulun rengini bilirdi (karşısında gördüğü aynı renkten 4 pulun tersi renkte 2 pul). O halde A veya B'den birinin alnında bir kırmızı, bir yeşil pul vardır. c) İkinci turda A eğer B'nin alnında 2 yeşil veya 2 kırmızı görseydi, bir kırmızı-bir yeşil pulun kendi alnında olduğunu anlardı. A bilmiyorum dediğine göre B bir kırmızı- bir yeşil pulun kendi alnında olduğunu anlamıştır.