

MATEMATİK PROBLEMLERİ VE BİLMECE ÇÖZÜM YÖNTEMLERİ

Erdoğan SAKMAN

Bir durumun sorun, problem ve bilmece olması için : 1) ulaşılmak istenen bir amaç ve 2) bu amaca ulaşmayı güçleştiren ve bir anlamda amacı tanımlayan ve belirgin duruma getiren engel veya engeller bulunmalıdır.

Bu engeller, problemin verileri ve koşullarıdır. Yaşam kavgasından başarılı çıkmak için nasıl bir tarafın diğerine üstünlüğü (fiziksel ve/veya ussal) gerekiyorsa problem ve bilmece çözümlerinde de üstünlük sağlamak zorunludur. Üstünlük sağlamak güçlükleri yenmek, zorlukları gidermektir. Bunun yolu, çözümü görmek yani çözümü sağlayan bir buluş yapmaktır.

Çözümü görenler, önceki deneylerini bilinçli veya bilinçsiz olarak kurallaştıranlardır. Yeni problem ve bilmecelelere, eski deneylerinden edindikleri çözüm yol veya yollarını uygulayıp bir buluş yaparak sonuca ulaşırlar.

Her nasılsa eski deneylerini kurallaştırmamış veya kurallaştıramamış olanlar ya da çözümü bilinen probleme uygun yaklaşımlara benzetme yapamayanlar, bu kuralları ayrıca öğrenip, uygulamalarla ustalık kazanarak, yeni karşılaştıkları problemleri buluş yaparak çözebilirler.

Çözümü gösteren; yani çözüm için gerekli buluş yapılmasını sağlayan yöntemler, aşağıdaki gibi sınıflandırılabilir :

1. Tanımsal Yöntem,
2. Çözümünden Gerilemek Yöntemi
 - 2.1 Öncüleri ve hükmü kullanarak,
 - 2.2 Aşamaları bularak,
 - 2.3 Olasılıkları saptayarak,

Her çözüm bir buluşa dayanır. İki bölümde yayınlayacağımız bu yazı dizisinin amacı, matematik problemleri bilmece ve hatta yaşam sorunlarının çözümlerinde buluş yapılmasını sağlayan yöntemler sunmak. Ancak bu cümle, çözümler için "bunlardan başka yöntem yoktur" anlamında değil, daha çok, çözümlerle ilgili akıl yürütmeleri amaca yöneltmek olarak değerlendirilmelidir.

Kolay bir problemin çözümü de bir başarıdır. Başarılar uç uca eklendikçe daha karmaşık sorunlar da çözülür; çünkü başarı, başarının mayasıdır. Bu duruma gelebilmenin temel koşulu ise, yöntem bilmektir.

3. Eşitini Bulmak Yöntemi
 - 3.1 Bilinen ve/veya bilinmeyene eşit olanı ve/veya olanları bularak,
 - 3.2 Bilinenleri ve/veya bilinmeyeni uygun bir yere ya da uygun bir biçimde AKTARIP biraraya getirerek veya bundan sonra yeni özellik veya ilişki bularak,
 - 3.3 Eşitleri eşitleyerek,
4. Yardımcı(lar) Yöntemi
5. Değiştirme Yöntemi
 - 5.1 Özellikleri eksilterek (çıkararak) değiştirmek (KÜÇÜLTMEK),
 - 5.2 Özellikleri çoğaltarak (artırarak) değiştirmek (BÜYÜLTMEK),
 - 5.3 Özelliklerin miktarlarını (ölçülerini, büyüklüklerini) değiştirerek,
 - 5.4 Özele indirgeme ile değiştirmek
 1. BİR'e (birime) indirgeyerek
 2. SIFIR yaparak,
 3. SONSUZ'a atarak
 - 5.5 Genelleştirerek
6. Benzetme Yöntemi
 - 6.1 İlişkiyi benzeterek,
 - 6.2 İlişkiyi (bağıntıyı) bularak
7. Karşıtlık (karşıt bulmak) Yöntemi
Kimi problemler ve bilmeceleler yukarıdaki yöntemlerin herhangi biri ile çözülebilir. Fakat kimi problem ve bilmecelelerin çözümü yöntem-

lerden birini kullanarak daha kısa sürede gerçekleştirebilir.

Aşağıda basit bir matematik problemi ile bir bilmeceye yöntemler tek tek uygulanmıştır. İsterse okur da karşılaştığı problem ve bilmeceye bütün yöntemleri uygulayabilir.

PROBLEM. Bir üçgende iki iç açının toplamı bunlara komşu olmayan dış açığa eşittir.

1. TANIMSAL YÖNTEM.

1. Ne istenmektedir? Bir üçgende iki iç açının toplamının bunlara komşu olmayan dış açığa eşitliğinin gösterilmesi istenmektedir.

2. Üçgen ne demektir? Üç doğrunun ikişer ikişer kesişerek oluşturduğu üç köşeli düzlem şekildir.

3. "Bir üçgende iki iç açının..." iç açısı ne demektir? Bir üçgenin iki kenarı arasında oluşan açılardan üçgenin iç bölgesinde kalan açıdır.

4. "Bir üçgende iki iç açının bunlara komşu olmayan..." Komşu açı ne demektir? Bir kolları ve köşeleri ortak açılardan her birine diğerinin komşusu denir. Komşu olmayan, bir kolları ve köşeleri ortak olmayan açılardır.

5. "Bir üçgende iki iç açının bunlara komşu olmayan dış açığa..." Dış açı ne demektir? Bir üçgenin iki kenarının oluşturduğu açılardan üçgenin dış bölgesinde kalan ve iç açığı 180 dereceye bütünüleyen açıdır.

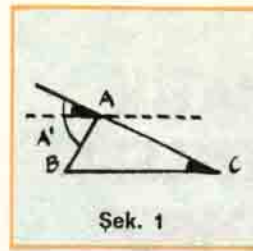
6. "Bir üçgende iki iç açının toplamı" ne demektir? İki iç açının, bir kolları ve köşeleri ortak olacak biçimde bir araya getirilerek elde edilen toplam açıdır.

7. "İki açığı bir kolları ve köşeleri ortak olacak biçimde yan yana getirmek..." ne demektir? İç açılardan birini, kollarından biri ikinci açının kolu ve köşesi, ikinci açının köşesi olacak biçimde toplamaktır.

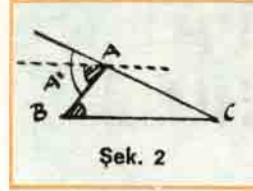
8. "Bir açığı ikinci bir açı ile yan yana getirerek toplamak..." ne demektir? Bir kolları ortak olan açılardan ikinci açının köşesinden birinci açının ortak olmayan koluna paralel çizerek açılı toplamaktır.

9. "Bir üçgende iki açının toplamı bunlara komşu olmayan dış açığa eşittir" ne demektir? Söz konusu iç açılar dış açı üzerine taşındığında, iç açılar toplamı olan açının dış açı ile çakışmasıdır.

10. "ABC üçgeninde (B) açısının (A') açısı üzerine taşınması" ne demektir? (A') açısı ile (B) açısının AB kolları ortak olduğundan, (A) köşesinden (B) açısının BC koluna paralel çizilmektir.



Şek. 1



Şek. 2

11. "ABC üçgeninde (C) açısının (A') açısı üzerine taşınması" ne demektir? (A') açısı ile (C) açısının AC kolları ortak olduğundan, (A) köşesinden (C) açısının CB koluna paralel çizilmektir.

12. (B) ve (C) açıları, (A) köşesinden BC kenarına paralel çizilerek, (A') açısı üzerine taşındığında ne olur? (A') köşesinden BC kenarına paralel çizil-

diği için $B = A_1'$ ve $C = A_2'$ olduğu görülür ve $A' = A_1' + A_2'$ olduğundan, $A' = B + C$ olur.

2. ÇÖZÜMDEN GERİLEMEK YÖNEMİ

2.1 Öncülleri ve Hükmü Kullanarak

1. Ne istenmektedir? Bir ABC üçgeninde (B) ve (C) iç açıları toplamının (A') dış açısına eşitliğinin gösterilmesi istenmektedir.

2. Problemin öncülleri ve hükmü nedir?

Öncül 1. ABC bir üçgen

Öncül 2. (B) iç açı

Öncül 3. (C) iç açı

Öncül 4. (A') komşu olmayan dış açı

Hüküm : $A' = B + C$ dir.

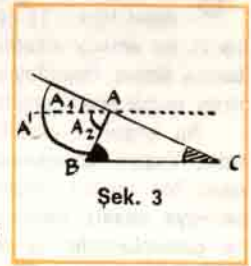
3. Hükmün yani (A') dış açısının (B) ve (C) iç açıları toplamına eşitliğinin doğruluğu NEYİN DOĞRU OLMASINI gerektirir? (B) ve (C) iç açıları toplandığında sonucun (A') dış açısına eşitliğini gerektirir.

4. "B ve C iç açıları toplanıp (A') açısına eşit oldu," diyebilmek NEYİN DOĞRU OLMASINI gerektirir? (B) ve (C) açılarının (A') dış açısına çakışmalarını gerektirir.

5. (B) ve (C) açılarının (A') açısıyla çakıştığını görmek NEYİ gerektirir? (B) ve (C) açılarının (A') açısı üzerine taşınmasını gerektirir.

6. (B) açısının (A') açısı üzerine taşınması (veya taşındı diyebilmek için) NEYİN DOĞRULUĞU gerektirmektedir? (A') dış açısı içindeki bir açının yani (A') açısının bir parçasının (B) açısına eşit olmasını gerektirir.

7. (A') açısının bir parçasının (B) açısına eşitliğinin DOĞRU OLMASI NEYİ gerektirir? (A') ve (B) açılarının AB kolları ortak olduğun-



Şek. 3

dan (A) köşesinden (B) açısının diğer kolu olan BC tabanına paralel çizilmesini gerektirir.

8. (e) açısının (A') açısı üzerine taşınması (veya taşındığını söyleyebilmek) için NEYİN DOĞRULUĞU gereklidir? (A') dış açısı içindeki bir açının yani (A') açısının bir parçasının (C) açısına eşit olması gerekir.

9. (A') açısının bir parçasının (C) açısına eşitliğinin DOĞRU OLMASI NEYİ gerektirir? (A') ve (C) açılarının AC kolları aynı doğru olduğundan (A) köşesinden (C) açısının diğer kolu olan BC tabanına paralel çizilmesini gerektirir.

10. (B) ve (C) açılarının (A') üzerine taşındığının doğruluğu NEYİN DOĞRU OLMASINI gerektirir? (A') dış açısının A₁ parçasının (C) açısına ve A₂ parçasının (B) açısına eşitliklerini gerektirir. (B) ve (A₂) açıları içters (Bkz. 6 ve 7) ve (C) ile A₁ açıları yöndeş (Bkz. 8 ve 9) olduklarından (B) ve (C) açıları (A') dış açısı üzerine taşınmış ve (B+C) toplamının (A') açısıyla çakıştığı görülmüş olur. O halde, bir üçgende iki açının toplamı bunlara komşu olmayan dış açiya eşittir :

$$A' = B + C$$

3. EŞİTİNİ BULMAK YÖNTEMİ

1. Ne istenmektedir? Bir üçgende iki içaçı toplanarak elde edilen yeni açının bu içaçılara komşu olmayan dış açiya eşitliğinin gösterilmesi istenmektedir.

2. Çözüm (sonuç) biliniyor kabul edilir : $B + C = S$ ve $A' = S$ dolayısıyla da $A' = B + C$, gibî.

3. $(B+C)$ ve (A') açılarının eşitleri aranır.

4. (B) ve (C) üçgenin içaçıları olduğundan : $A + B + C = 180$ derecedir.

5. (A') dış açısı tanım gereği (A) açısıyla ortak köşeli ve böylece, $A' + A = 180$ derecedir.

6. [4] ve [5] kullanılarak, $B + C : 180 - A$ ve $A' = 180 - A$ olduğu görülür. Hem $(B + C)$ toplam açısı hem (A') açısı aynı açiya eşit olduklarından, $B + C = A'$, elde edilir.

3. ESİTİNİ BULMAK YÖNTEMİ,

3.2 Aktarmak

1. Ne istenmektedir? Üçgenin (B) ve (C) içaçıları toplamının (A') dış açısına eşitliğinin gösterilmesi istenmektedir.

2. Eşitini Bulmak Yöntemi, kesinlikle bilinen şekillerin söz konusu olduğu durumlarda problemin bir veya birkaç ögesinin şeklin başka bir yerinde eşiti veya eşitleri oluşturularak uygulanabilir. Bu, bir AKTARMA işlemidir.

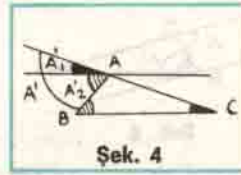
3. $(B + C)$ toplam açısıyla (A') açısının eşit olduklarını göstermek, $(B + C)$ ile (A')

açısının çakışmaları anlamındadır. Çakışma, açıların bir yerde bulunmalarını gerektirir. Açılar ayrı yerlerde olduklarından çakışıp çakışmadıklarını göstermek için istenen bir yere aktarılmalıdır.

4. Açılar, A, B veya C köşesine ya da üçgenin kenarlarından biri üzerindeki bir noktaya aktarılabilirler.

5. Kenarlarından biri üzerindeki istenen bir noktaya aktarmak üç açı için üç işlem yapmayı gerektirir. Halbuki açılardan birinin bulunduğu köşeye diğer iki açıyı aktarmak yeterlidir.

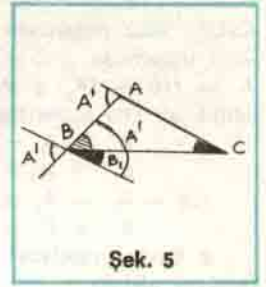
6. (B) ve (C) açıları (A') açısı üzerine (A) köşesinden BC tabanına paralel bir doğru çizilerek aktarılabilir.



Şek. 4

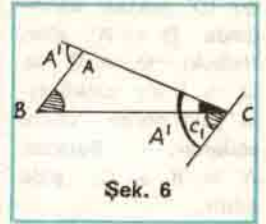
7. (A') ve (C) açıları (B) açısı köşesine aktarılabilir.

(B) köşesinden AC kenarına paralel çizildiğinde, $B_1 + B = A'$ olur çünkü içters açılardır, $\hat{B}_1 = \hat{C}$ dir çünkü bunlar da BC kesenine göre içters açılardır. O halde, $B_1 + B = A'$ eşitliğinde $\hat{B}_1 = \hat{C}$ kullanılarak $B + C = A'$, elde edilir.



Şek. 5

8. Benzer biçimde (C) köşesinden AB kenarına paralel bir doğru çizildiğinde $C + C_1 = A'$ olur. Çünkü AC kesenine göre yöndeş açılardır. Diğer yönden, $B = C_1$



Şek. 6

dir çünkü (B) ve C_1 açıları BC kesenine göre içters yani eşit açılardır : $B = C_1$. $C + C = A'$ eşitliğinde $C_1 = B$ kullanılarak : $B + C = A'$, elde edilir.

4. YARDIMCILAR YÖNTEMİ

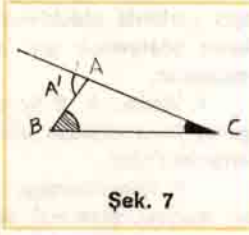
1. Yardımcı, problem verileri ve koşulları arasında bulunmayan fakat çözüme yararı olacağı sanılan bir araç veya probleme yapılan bir eklemidir.

2. (ABC) üçgeninde (B) ve (C) açıları toplamının $(B + C)$, (A') dış açısına eşitliği söz

konusu olduğundan üçgene bir doğru eklenebilir.

3. Şekle yapılacak ekleme, herhangi bir köşeden karşıdaki kenara çizilecek bir paralel doğru olabilir.

4. Böyle bir eklemeden sonra "NE OLUR?" sorusu sorulur yani "B köşesinden AC kenarına paralel bir doğru çizilse ne olur?" sorusu sorularak durum incelenir. (B) köşesinde oluşan (B + C) açısı ile (A') açılarının AB kesenine göre içters yani eşit oldukları görülür.



Şek. 7

5. Şekle yapılacak ekleme (A) köşesinden BC tabanına çizilen (h_a) yüksekliği olabilir.

h_a yüksekliği yardımcı olarak çizilirse NE

OLUR? ABD üçgeninde : $B + A_1 = 90$ ve ACD üçgeninde : $C + A_2 = 90$ dir. Halbuki $A' = 180 - (A_1 + A_2)$ dir, Saptanan bu eşitlik alt alta toplandığında :

$$B + A_1 = 90$$

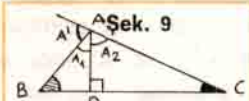
$$C + A_2 = 90$$

$$180 - A_1 - A_2 = A'$$

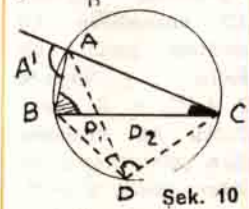
$$B + C = A' \text{ bulunur.}$$

6. Şekle yapılacak ekleme üçgenin dış çemberi olabilir :

Dış çember üzerinde ve BC kenarı altında bir (D' noktası alındığında $D = A'$ olur. Halbuki, $D_1 = C$ ve $D_2 = B$ dir çünkü aynı yayı gören çevre açılarıdır. Buradan $A' = B + C$, elde edilir.



Şek. 9



Şek. 10

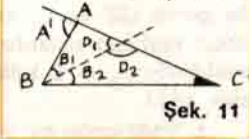
7. Şekle yapılacak ekleme, örneğin, (B) açısının açığı ortayı olabilir :

BD açı ortayı çizilirse NE OLUR?

$$A + B_1 + D_1 + = 180$$

$$C + B_1 + D_2 = 180$$

$180 = A' + A$ alınır ve taraf tarafa toplanır $D_1 + D_2 = 180$ ve $2B_1 = B$ olduğundan $B + C = A'$, elde edilir.



Şek. 11

5. DEĞİŞTİRMEK YÖNEMİ

5.1 Küçültmek

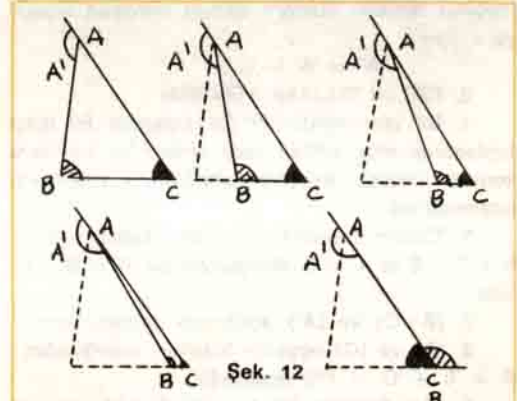
(A) açısı; (a) kenarı sıfıra yaklaştırılarak ya da (a) kenarı sabit tutulup (A) köşesi tabandan uzaklaştırılarak küçültülebilir. (A) açısı, (a) kenarı sıfıra yaklaştırılarak küçültüldüğünde NE OLUR?

Aşağıdaki şekillerden anlaşılacağı gibi A : 0 varsayılan bir üçgende (A') açısı 180 derece olmaktadır. Ayrıca (B) açısı (C) açısının bütünüleni durumunu alacağından, $A' = B + C$ olur.

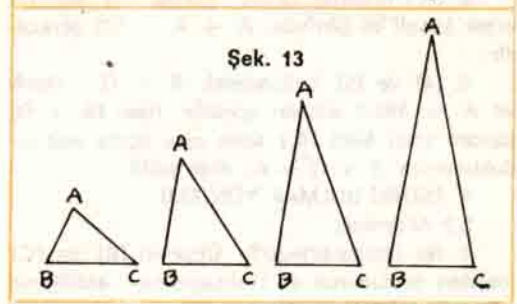
5.2. ve 5.3 Özellikleri Çoğaltmak

Değiştirme ilkesi üçgenin bir elemanının, örneğin (h_a) yüksekliği, büyütülmesiyle uygulanabileceğinden (h_a) büyürse (A) köşesi BC tabanından uzaklaşır. NE OLUR? Bu durumda (A) açısı sıfıra yaklaşır.

(A) açısı ile sıfıra doğru yaklaşırken (A') açısı ile (B) ve (C) içaçıları büyümektedir. (A) köşesi çok uzaklaştığında yani sonsuza gittiğinde (A') dışaçısı 180 derece ve (B) ile (C) açılarının her biri 90 derece olacağından :



Şek. 12



Şek. 13

$A' = B + C$, elde edilir.

5.4 Özele İndirmek

1. "Bir üçgen," herhangi bir üçgendir; eş-kenar, ikizkenar veya dik üçgen.

2. "Üçgen dik üçgen alınır NE OLUR?" sorusu sorulur. $A + A' = 180$ ve $A = 90$ derecedir yani $A' = 90$ olur. $A + B + C = 180$

MANTIK BİLMECELERİ

KİM NE İŞ YAPIYOR ?

Erol, Faruk ve Galip aynı işyerinde kapıcı, telefoncu ve kâtip olarak çalışmaktadırlar. Kapıcı ve telefoncu, arasıra yalan söylemektedirler. Aralarında geçen aşağıdaki konuşmalara göre, kim ne iş yapmaktadır?

Erol : 'Galip, telefoncudur.'

Faruk : 'Erol kapıcıdır.'

Galip : 'Faruk, kâtipdir.'

KİM KAÇINCI ?

Ali, Bekir, Cahit, Davut ve Erol yarışmaya girmişler, Sonuçta Bekir, Ali'den dört önde ve Davut da Cahit'ten iki sıra geride kalmış. Erol'un yeri tek sayılı olduğuna göre, her biri yarışmada kaçınıcı gelmiştir ?

KİM NEREDE OTURUYOR ?

Ali, Bekir, Cahit, Davut ve Erol şu işlerden birini yapmaktadırlar : Temizlikçi, Kapıcı, Telefoncu, Şoför ve Katip. Yuvarlak bir masada oturan bu kişilerden, kimin nerede oturduğunu ve ne iş yaptığını aşağıdaki bilgilerden yararlanarak bulunuz.

1. Adlarının baş harfleri a'fabe de birbirini izleyen kişiler yan yana değildir.
2. Ali, Cahit'in sağında değildir.
3. Bekir, kapıcı ile şoför arasında oturur.
4. Biri Davut olan, kapıcı ve telefoncu yan yana değildir.
5. Ali, temizlik yapmamaktadır.

SINAV ÖNCELİĞİ

Bekir, Davut'tan kaç sıra öndeyse, Ali de Faruk'tan o kadar geridedir. Davut ve Cahit'in sıraları çift, Ali'ninki tek sayıdır. Erol, Ali'den ve Faruk, Davut'tan geridedir. Galip hakkında bilgi olmadığına göre, kim sınava kaçınıcı girecektir.

KİM NE YAPTI ?

Ali, Bekir, Cahit ve Davut pencere camını kırmakla, duvar saatini bozmakla ve kalemli kaybetmekle suçlanmaktadırlar. Zaman zaman görülen bu olayların her birini aynı kişinin yaptığı saptanmıştır. Ali, Cahit ve Davut'un söz konusu olduğu durumlarda, cam kırılıyor ve saat bozuluyor. Ali, Bekir ve Cahit'in söz konusu olduğu durumlarda, kalemler kayboluyor ve cam kırılıyor. Yalnız Ali ve Davut söz konusu ise saat bozuluyor. Acaba, kim ne ile suçlanmalıdır?

Erdoğan SAKMAN

Yazarımız Erdoğan SAKMAN tarafından sizler için hazırlanan bu bilmecelerin yanıtlarını gelecek sayımızda bulacaksınız.

ve $A : 90$ olduğundan $B + C = 90$ veya $A' : B + C$ dir.

3. "Üçgen eşkenar alınırsa NE OLUR?" sorusu sorulur. $A + A' = 180$ ve $A = 60$ derece olduğundan $A' : 120$ derecedir. Ayrıca $A + B + C = 180$ ve $A = 60$ alınarak $B + C = 120$ yani $B + C = A'$, elde edilir.

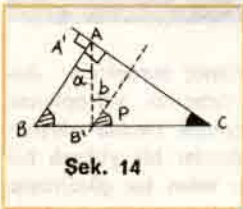
5.5 Genelleştirmek

Dik üçgen için geçerli olan hükmün ($A' : B + C$), eşkenar üçgen için de geçerliliği savı pekiştirmekte fakat kesinliğini göstermemektedir.

Genelleştirmek, üçgeni herhangi bir üçgen olarak alıp hükmün doğruluğunu göstermektir. Dik üçgeni herhangi bir üçgene çevirmek yani dikliği bozmak için AB kenarını AB' durumuna ge-

tirmek yeterlidir.

AB' yeni $AB'C$ üçgeninin kenarı alındığında dik olan A' açısı (a) kadar büyümüştür. (C) açısı değişmemiştir. Eğer $B' = B + a$ olursa, $B + C = A'$ hükmü doğrulanmış olur. O halde, (B) açısının da (a) kadar büyüyerek (B') olduğu gösterilmelidir ya da (B') açısı öyle iki parçaya ayrılmalıdır ki bir kısmı (a) ve diğer kısmı (B) açısına eşit olsun. (B') köşesinde (a) açısına eşit bir açı çizildiğinde kalan parça (a) kadar olmalıdır, (B') köşesinden AC kenarına paralel çizildiğinde (B') açısı içinde oluşan küçük açı (b) ile gösterilirse, (a) ve (b) içters açılar olduklarından eşittirler. O halde, üçgen dik üçgen iken $A' = B + C$ eşitliği, $a = b$ ve $B = P$ olduğundan yeni $AB'C$ üçgeninde, $A' + a = B + a + C$ olmuş yani (B) ve (C) içaçıları toplamı ile A' dışaçısı arasındaki ilişki değişmemiş ve $A' = B + C$ olarak kalmıştır.



Sek. 14