

# ÖKLİD *ve* ELEMANLARI

Prof. Dr. Ali Sinan Sertöz [ *Bilkent Üniversitesi - Fen Fakültesi - Matematik Bölümü*

Bir kitabın ömrü ne kadardır?  
Yazıldıktan on yıl sonra kaç kitap hâlâ  
aranacak ve okunacaktır?  
Sait Faik öyküleri henüz eskimedi ama  
onlar daha yüz yaşında yok.  
Tolstoy'un *Savaş ve Barış*'ı yüz elli yaşını  
doldurdu, hâlâ değişik dillere çevrilip  
okunuyor. Bir de beş yüzyıl öncesinden  
Cervantes'in *Don Kişot*'u var  
yıllara meydan okuyan.

Bilimsel kitapların ömrü  
daha kısa oluyor. Üretilen yeni bilgiler  
bilimsel kitapları çok çabuk antika  
sınıfına itiveriyor. Cahit Arf'ın  
*Cebir Dersleri* kitabı her  
ne kadar içerik açısından sağlam olsa da  
günümüz matematik eğitiminden  
beklenenlere artık cevap veremiyor.  
Oysa yazılışı üzerinden ancak  
yetmiş yıl geçti.

Bir matematik kitabının ömrü  
en fazla ne kadar olabilir?  
Yüz yıl? Beş yüz yıl? Bin yıl?

Öklid'in, geometrinin temellerini attığı  
*Elemanlar* adlı kitabı iki bin üç yüz yaşında.  
Bugüne kadar binin üzerinde  
değişik baskısı yapıldığı düşünülüyor.  
Bugün on dokuz dile çevrilmiş durumda.  
Bazı dillerde birden fazla çevirisi var.  
Her gelen kuşak kitabı kendi anlayacağı  
akıcılıkta yeniden kendi diline  
çeviriyor.

*Elemanlar* iki bin üç yüz yıl önce  
okuyucusuna bilgiyi keşfetme  
heyecanını hangi canlılıkta verdiyse  
bugün de okuyanları aynı düzeyde  
heyecanlandırıyor.  
Bu heyecan yalnızca yeni  
bir şey öğrenme heyecanı değil,  
o bilginin adım adım keşfedilişine  
birinci elden tanık olma  
heyecanı.





Öklid (MÖ 330 - 275)

**B**inlerce yıldır kitabı okunan, adı her anıldığında matematik dünyasında içten bir saygı uyandıran Öklid'in kim olduğu hakkında hiçbir sağlam veri yok. Mısır'ın İskenderiye şehrinde I. Ptolemy hâkimiyeti döneminde yaşadığı düşünülüyor. O dönemlerde yaşamış olan pek çok matematikçi ve oyun yazarı hakkında ayrıntılı bilgiler ulaşmış günümüze. Çoğunun eserleri kaybolmuş, günümüze erişen eserler de tarihi değerinin ötesinde bir etkiye sahip değil, ama yazarlarının neredeyse özel hayatlarını bile biliyoruz. Öte yandan yazdığı kitap insanlık düşünce tarihini derinden etkilemiş bu yazar hakkında, uydurma olduğundan şüphelendiğimiz, iki söylentiden başka bir bilgimiz yok.

İlk söylentiye göre ders verdiği bir öğrencisi “Ben bunları niye öğreniyorum? Gerçek hayatta ne işime yarayacak?” deyince Öklid kölesini çağırıp “Şuna biraz para ver de öğrenince eline bir şey geçtiğini görsün” demiş. Bu hikâye pek çok eski zaman matematikçisi hakkında da anlatılır. Hikâyede satır arasında adı geçen kölenin hayatıysa kimsenin dikkatini çekmez. Oysa Eski Yunan'da matematiğin birdenbire önem kazanıp gelişmesinin nedeni, geçim kaygısı olmayan soylu sınıfın bilinmeyen bir nedenden dolayı matematiğe ilgi duyması ve zamanını matematiğe adanmasıdır. Kim bilir belki de tıpkı savaşmak gibi bir etkinliği nasıl soylu işi olarak görmüşlerse, insana verdiği zarar açısından matematiği de aynı düzeyde görmüş olabilirler!

Bir diğ er sy lentiye g re de klid'in *Elemanlar* kitabını inceleyen kralın "Geometri ğ renmek i in bundan daha kolay bir yol yok mu?" serzenişine klid "G n l k hayatta avam ve kral i in ayrı yollar vardır, ama geometriye giden bir kral yolu yoktur" diyerek cevap vermiştir. Bu hikâ ye de, az  nceki hikâ ye gibi yıllar i in de baş ka antik d nem matematikçileri i in de anlatılagelmiştir.



1938 Bourbaki toplantısı  
Soldan sağı a:  
Simone Weil, Charles Pisot, Andre Weil,  
Jean Dieudonne, Claude Chabauty,  
Charles Ehresmann, Jeab Delsarte

Ben k ç kken karış tırdığ um bir ansiklopedide *Elemanlar* ve yazarı klid hakkında biraz bilgi edinmiş tim. Ansiklopedi *Elemanlar* kitabının  nemini anlatmış ve bende belki ben de bir g n b yle bir ş ey yazarım hevesi oluş masına neden olmuş tu. Heveslenmemin bir diğ er nedeni de klid'in eski d nemde İskenderiye'de bir m ze çalış anı olduğ u bilgisiydi. O g ne kadar g rd ğ um m zeci amcaların aslında o sakin g r n ş leri altında ne b y k yetenekler gizlediklerini d ş nm ş, onlara imrenmiş tim.

Yıllar sonra Yunan mitolojisinde m zik ve ş iirden sorumlu dokuz tanrı ç a olduğ unu  ğ rendim. Bunlar dokuz kız kardeş tirler ve İskenderiye'de eski d nemde kurulan bir bilim yuvasına bu tanrı ç aların adı verilmiştir. Fakat Yunanca "Mouseion" olan bu ad T rkç eye ses benzerliğ i nedeniyle "M z" olarak çevrilmiştir. Kısacası çocukluğ umda her karış laştığ umda derin ve gizli bir saygıyla g l msediğ im m zeci amcalar meğ erse klid ile meslektaş değ ilmiş. Oysa çocukken ne kadar masum ve mutluyduk.

## Bourbaki mi klid'den Ç ıktı, klid mi Bourbaki'den?

Öklid'in *Elemanlar*'ı yazdığ u d nemden y z yıl kadar  nce Megara'da yaş amış klid adında bir filozof vardır. Sokrat'ın  ğ rencisi olan, hatta onun son gecesinde yanında bulunan  ğ renci grubu i in de olan Megaralı klid çalış maları ve d ş nceleriyle d nemini derinden etkilemiş saygın bir insandı.

Yine bir s y lentiye g re İskenderiyeli bazı matematikçiler matematiğ e bir d zen getirmek amacıyla yola çıkıp *Elemanlar* kitabını ortaklaş a yazmış ve Megaralı klid'e duydukları saygının bir belirtisi olarak onun adını ortak ad olarak kullanmış lardır. *Elemanlar*'ın on  ç cildi boyunca  slubun zaman zaman niye değ işt iđ i, bazı kitaplarda genel bir bakış açısıyla iş lenen bir konunun diğ er kitaplarda yeniden neden ele alındığ u gibi sorulara makul cevaplar bulmanın

zorluđ u, bu s y lentiye savunanların tezlerini g ç lendiriyor.

İki bin yıl sonra Bourbaki grubunun aynı amaçlarla ortaya çıkması ve yazdıkları kitap serisine *Matematiğ in Elemanları* adını vermeleri de belki bir ş ey bildiklerinin iş areti olabilir.

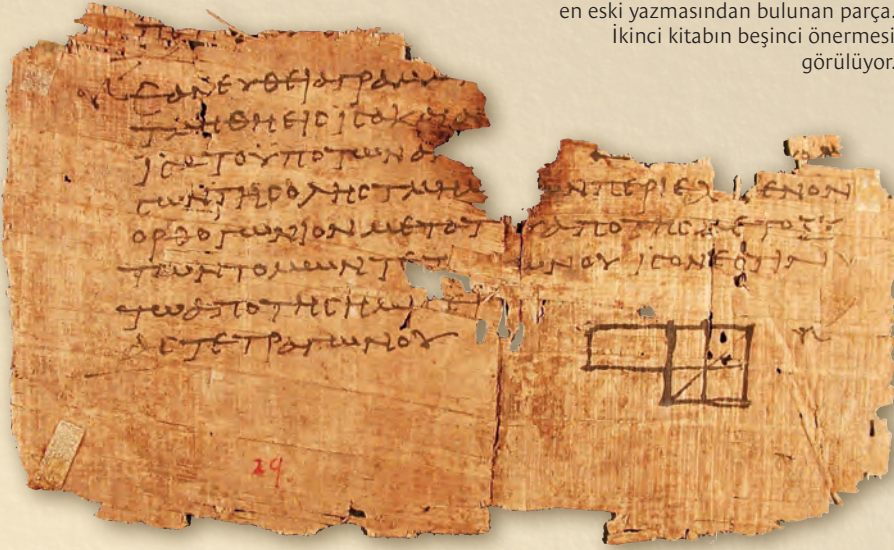
Bu teze karış ı çıkanların baş ında eski k ye yeni adet getirmeyinciler vardır elbette. Onları geç ersek, bu teze karış ı olan saygın bilim insanları bu ç eşt ir bir ortak çalış manın eski d nemde baş ka bir  rneğ i olmamasının  nemli bir g sterge olduğ unu s yler.  stelik Bourbaki kitaplarının yazarları d nemlerinin  nemli matematikçileridir ve hepsinin adı bilinmektedir. Öklid'in yaş adığ u d ş n len d nemde bu kitabı yazacak ç apta matematikçi yoktur. Sıradan matematikçilerin bir araya gelip binlerce yıl eskimeyen b yles i bir kitap yazdığ ına inanmak da pek ger ekçi değ ildir.

Tarih her yıl yapılan yeni kazılar ve araş tırmalar sonunda ortaya çıkan yeni bulgular ış ıđ ında geç miş i yeniden kurgulamaya çalış an, heyecan dolu dinamik bir bilim dalıdır. Kim bilir belki bir g n klid'in defterleri bir yerden çıkıverir. O g ne kadar biz de klid'i bırakıp *Elemanlar*'la ilgilenelim.

## Papir s, Kodeks, E-kitap

Öklid bir kiş i miydi yoksa bir matematikçi grubu muydu sorusunu ş imdilik bırakalım ve nasıl ki Bourbaki'nin tek bir kiş i olmadığ unı bilmemize rağ men ondan tek bir yazarımız gibi bahsediyorsak bu saygıyı klid adından de esirgemeyelim.

Elemanlar kitabının  
en eski yazmasından bulunan parça.  
İkinci kitabın beşinci önermesi  
görülüyor.



## Kitap Olarak Elemanlar

Matematiği oluşturan asıl elemanlar, yapıyı oluşturan öğeler, geometrinin temel kavramları anlamında *Elemanlar* adını vermiştir Öklid kitabına. Kodeks formatına geçirildikten sonra tekrar tekrar elle çoğaltılmıştır. Pek çok okuyucu kitabın sayfa kenarlarına o sayfadaki konuları açıklayıcı notlar düşmüştür. Bu notlar hem içerik hem de tarihi değer açısından önemlidir.

Bir de kitabı çoğaltırken Öklid'in hata yaptığını, bazı konuları eksik bıraktığını, bazı kavramları öyle değil böyle açıklamasının daha doğru olacağını düşünen yazarlar çıkmıştır. Bu "hataları" düzeltmek için iyi niyetle kitabı yer yer değiştirmişlerdir. Orijinal papirüs kopyalar yok olduğu için Öklid'in aslında tam olarak ne yazdığı da matematik tarihçilerinin tahminlerine kalmıştır. Bir kez daha cehennemin yollarının iyi niyet taşıyıcıyla döşenmiş olduğunu görüyoruz.

Uzun yıllar *Elemanlar* için en güvenilir kaynak, Öklid'den altı yüz yıl kadar sonra yaşamış ve o malum "müzedde" çalışmış Theon'un çalışmaları esas alınarak yapılan kopyalar olmuştur. Theon, adı günümüze kalan kadın matematikçi Hypatia'nın babasıdır. *Elemanlar*'ın kopyasını ve açıklamalarını kızının yardımıyla yaptığı düşünülüyor. Theon sık sık öğrencilerin artık eskisi kadar iyi olmadığından dem vurmakta "nerede o bizim zamanımızdaki öğrenciler" diye tarih ötesinden şikâyetle bulunmaktadır. Öklid'in *Elemanlar*'ını da bu zayıf öğrenciler anlasın diye "tane tane" açıkladığını yazmaktadır.

Öklid *Elemanlar*'ını papirüs rulolarına yazmıştı.

Papirüs ruloları okumak için bir masaya oturuyordunuz ve sağ elinizle tuttuğunuz ruloyu sol elinizle yavaş yavaş açıp okuyordunuz. Okumayı kolaylaştırmak için yazılar dar sütunlar halinde yazılıyordu. Papirüslerin sadece tek yüzüne yazı yazılabiliyordu. Rulunun vücudunuza değen kısmı aşınıyordu. Papirüs Akdeniz havzasında icat edilmişti, farklı iklimlerin olduğu ülkelere gönderildiğinde rulolar bozuluyor ve okunmaz hale gelebiliyordu. Sık sık yeni kopyaların yazılması gerekiyordu.

Bütün bu zorluklara rağmen bugün bildiğimiz biçimde kitap icat edildiğinde önce hiç kabul görmemişti. Bu yeni formata ağaç kütüğü anlamında kodeks deniyordu. Raflar dolusu papirüs ruloları tek bir kütüba sığabiliyordu. Sayfaların arkası da kullanılabilirdi. Üstelik sayfalar papirüste olduğu gibi hassas malzemedense hayvan derisinden hazırlanıyordu, daha dayanıklıydı. Her yeni gelişme eski düzene alışmış büyük bir grubun direnişiyle karşılaşır.

Kodeks formatı da icadından sonra yaklaşık beş yüz yıl tutucu insanlarla mücadele etti ama sonunda tüm papirüsler kodeks formatına aktarılıp yok edildi.

Öklid'in *Elemanlar*'ı da bu süreçte yeni formata aktarıldı. Orijinal kopyaların arkeologların bile bulamayacağı şekilde yok edildiğini düşünüyoruz, ama gizliden gizliye de bir yerlerde yıllardır açılmamış bir dolap kapağının arkasında küf kokan birkaç papirüs bulunması umudunu canlı tutuyoruz.

Bugün e-kitabın geleceği konusunda bir tartışmaya girmeden önce bunları aklınızdan hızla geçirin diye anlattım. İlerde *Bilim ve Teknik* dergisinin bin beş yüz ellinci yılında "Eskiden kâğıt kitaplar vardı. Beş on tanesini bile taşımak bir insan için çok zordu. Suya düşseler okunmaz olurlardı. Yüksek raflardan kafanıza düşüp sizi yaralayabilirlerdi. Şimdi e-kitap okuyucularımızda binlerce kitabı yanımızda taşıyoruz. Tüm kitaplar ana bilgisayarda olduğu için e-okuyucununun kaybolmasının da bir zararı olmuyor" diye başlayan yazılar çıkmaya başladığını göz ardı etmemek gerek.

Bin yedi yüz yıl önceki öğrencilere Theon'un yönelttiği eleştirileri anlatınca otuz yıl önce katıldığım bir semineri anlatmamam olmaz. Bölümümüzdeki Güney Koreli bir hoca çok ilginç bir konuda seminerler vermek istediğini ve meraklı öğrenci aradığını duyurdu. Arkadaşlarıyla hemen gönüllü olduk. Konu çok güzeldi ama küçük bir sorun vardı. Güney Koreli hocamızın İngilizcesini anlamak mümkün değildi. Bölümde onunla sohbet eden ve her halde onun İngilizcesini anlayan tek kişi, ayaklı kütüphane Larry idi. Larry hocamız bize tercümanlık yapmayı kabul etti ve seminerler başladı. Başlarda Güney Koreli hocamız tahtaya İngilizce yazıyor ve kendince İngilizce anlatıyor, arada bir de susup Larry'ye bakıyordu. Larry başını biraz bize çevirip İngilizceden İngilizceye çeviri yapıyordu. Burada da küçük bir sorun vardı. Larry gençliğinde gırtlak ameliyatı geçirmişti ve onun İngilizcesini anlamak için de ondan epey maceralı birkaç ders almış olmanız gerekiyordu. Neyse ki biz o şanslı gruptaydık. Biz dediğim de arka sıraya yan yana oturmuş iki Kanadalı, bir Hong Konglu ve bir Türk. Birkaç ay sonra bir seminerde tahtadaki hocayla Larry biraz atıştı. Larry bu atışmayı bize tercüme etmekte isteksiz kaldıysa da ısrarlarımız sonunda açıkladı. Güney Koreli hoca bizi beğenmiyor, ilgisiz, sadece diploma peşinde koşan zamane gençleri olarak görüyormuş. Larry de sen bu çocukların hangi şartlar altında aylardır bu seminerleri takip ettiğini fark etmiyor musun, diyerek bizi savunmuş. Güney Koreli hoca hiç tunmamış.

Geliyorlar ama hâlâ konuya katkı yapacak bir teorem bulmadılar, demiş. Bazen çıta çok yükseğe konuyor! Kızı Hypatia olan birinin koyduğu çitayı tahmin etmemiz ve belki yüz yıllar öncesinin öğrencileri hakkında yeniden düşünmemiz gerekebilir.

Theon Öklid'in kitabına zaman zaman eklemeler de yapmış ve bunlardan başka kitaplarında söz etmiştir. Öklid'in *Elemanlar*'ının aslının, Theon'un katkıları çıkarıldığında, nasıl olduğu sorusu yakın zamana kadar cevapsız kaldı. Eldeki kopyalar Theon'un kitabının yüz yıllar içinde yapılan kopyaları olduğu için Theon öncesi dönemde *Elemanlar* nasıldı sorusu ciddi bir araştırma konusuydu.

Fransız Devrimi döneminin önde gelen matematikçilerinden François Peyrard, Napolyon'un Paris'e getirdiği savaş ganimetleri arasında Vatikan Kütüphanesi'ne ait bir el yazması bulur ve bunun *Elemanlar*'ın dokuzuncu yüz yılda yazılmış bir kopyası olduğunu fark eder. Bu kitap *Elemanlar*'ın günümüze erişen en eski kopyasıdır ve Theon'un yaptığını söylediği değişiklikler bu yazmada yoktur.

Nihayet on dokuzuncu yüz yılın sonunda ünlü Danimarkalı tarihçi Johan Ludvig Heiberg, eldeki tüm *Elemanlar* kopyalarını tarayıp Vatikan kopyasını esas alarak Öklid'in *Elemanlar* kitabını yeniden kurmuş ve Latinceye çevirmiştir. Bunun nasıl büyük bir iş olduğunu anlamak için eski yazmalara bir göz atmak gerekir. Her şeyden önce bunlar birisinin el yazılarıdır. Zaman içinde sayfalarda oluşan aşınmalardan dolayı pek çok harf net olarak okunamamaktadır. Eskiden üzerine yazı yazılan malzeme çok pahalı olduğu için içinde on binlerce kelime olan kitaplarda kelime aralarına boşluk bırakma gibi bir lüks yoktu. Bunun metinleri okurken doğuracağı zorluğu tahmin etmek için "çaresizsiniz" sözcüğünü gördüğünüz yerde bunu "çare sizsiniz" diye okumanız gerekirken gerekmediğine nasıl karar vereceğinizi düşünün. Ya da "yeteneksizsiniz" yazdığını gördüğünüz yerde bunun bir övgü mü yergi mi olduğuna nasıl karar vereceğinizi düşünün.

O yüzden bu çevirileri yapan insanlar sadece Eski Yunanca bilerek bu işe soyunmuş kişiler değiller.

*Elemanlar*'ın Vatikan kopyasında dik üçgen teoreminin olduğu sayfa. Daha önceki kullanıcıların sayfa kenarına yazdıkları açıklamaların yoğunluğu dikkat çekiyor.



Eski dönemde yazılmış neredeyse her şeyi okumuş, çalışmış, değişik dönemlerin ve değişik yazarların üsluplarını bilen kişiler, eğer bu bilgilerinin yanı sıra bir de matematik biliyorlarsa bu çevirilere teşebbüs ediyorlar.

Heiberg'in çıkardığı Eski Yunanca metni ve Latince çeviriyi kullanarak Öklid'in *Elemanlar*'ını İngilizceye çok ayrıntılı analiz ve yorumlar eşliğinde çeviren kişi de Thomas Heath olmuştur. Heath'in sayfalar boyu süren yorumlarından yorulanlar için Richard Fitzpatrick yorumsuz bir İngilizce çeviriyi internet sitesinde meraklılara sunmuştur.

## Nihayet *Elemanlar*: İçerik ve yöntem

*Elemanlar* kitabında MÖ üçüncü yüzyıldaki tüm matematik bilgisinin sistematik bir şekilde sunulduğu görülür. Kitabı iki bin yıldır canlı tutan yönü bu sistematığın insanlığın düşünce tarihini derinden etkileyen bir yetkinlikte çalıştırılmış olmasıdır. Elbette mükemmel bir sunum yoktur kitapta ama başka hiç bir ölümlü de gerçeğe Öklid'in yaklaştığından daha fazla yaklaşamamıştır.

*Elemanlar* nokta, çizgi, doğru ve düzlem tanımlarıyla başlar. Osmanlı'da güzel bir tanım için "efradını cami ayyarını mâni" derlerdi, benzerlerini toparlayacak, benzemeyenleri dışarıda tutacak anlamında. Bunun geçerli olması için "benzerlerin" ve "benzemeyenlerin" daha önce tanımlanması ama daha önceki o tanımların da "efradını cami ayyarını mâni" olması gerekir. Bunun bir sonu olacağı ve bir yerden sonra

bazı temel kavramları tanımlamadan bırakmak zorunda olacağımız aşikârdır. O yüzden nokta ve doğru gibi kavramların tanımlanmadan, belit (aksiyom) olarak kalması daha doğru olurdu. Zaten Öklid de "nokta büyüklüğü olmayandır" diyerek tanım formatını zorlar.

Öklid'in *Elemanlar*'da tanım konusunu fazla resmileştirmeden, bu kavramları sohbet havasında anlattığı, tanımların ciddiye alınıp numaralandırılıp didik didik incelenmesinin daha sonraki yüzyıl yazarlarına ait olduğu düşünülür. Benim izlenimim ise Öklid'in aslında hiç tanım vermediği, kullandığı kavramların önermelerin kanıtlarının akışından çıkarılmasını beklediği yönündedir. *Elemanlar*'ı bir de bu bakış açısıyla, tanımları atlayarak okursanız kitaptan çok farklı bir keşfetme zevki alacaksınız.

Kitabın can alıcı yönü önermeler ve bunların kanıtlarıdır. Önermeler ya bazı şartlar altında bazı bağıntıların geçerli olacağını iddia eder, önerir ya da bazı verilerden başlayarak bazı çizimleri yapmanın mümkün olduğunu iddia eder.

On üç cilt tutan *Elemanlar* kitabının ilk önermesi verilen bir doğru üzerine eşkenar bir üçgen çizmenin yolunu anlatır. Her önerme önceki önermeleri kullanarak adım adım ilerler. Birinci kitabın son iki önermesi dik üçgen teoremiyle ilgilidir. Ama önce bir kenar verildiğinde bunun üzerine bir kare çizmenin mümkün olduğu gösterilmelidir ki bu karelerin büyüklüklerinden, yani alanlarından söz edebilelim. Yoksa hiçbir zaman var olmayacak karelerin alanları hakkında söylenecek bir sözün bir değeri olmayacaktır.

Önermeler tamamen sözeleldir. Hiçbir sembol veya şekil içermez. "Bir dik üçgende dik açıyı gören kenar üzerindeki kare, dik açıyı içeren kenarlar üzerindeki karelere eşittir" diye yazar Öklid. Burada "kare" derken "karenin alanı" demek istediğini anlamamız gerekir. "Karelere eşittir" derken de "karelerin alanlarının toplamına eşittir" demek istediğini anlamamız gerekir. İki üçgen için eşittir dediği zaman bu üçgenlerin örtüşen üçgenler mi yoksa aynı alanlı üçgenler mi olduğunu sizin anlamamız gerekir.

Bu zorluğu önermenin kanıtının ilk paragrafında hemen çözer Öklid. Burada derhal bir şekil çizer ve önermenin ifadesindeki ön şartların ne olduğunu bu şekil üzerindeki harfleri kullanarak açıklar. Sıra önermenin iddiasının ne olduğuna gelince, Öklid her zaman "diyorum ki" diye başlayan bir cümle ile önermenin iddiasının ne olduğunu şekil üzerinden anlatır. Sonra kanıt başlar. Yalnızca o ana kadar kanıtlamış olduğu sonuçları kullanarak bu yeni önermeyi kanıtlar.

Newton'un hocası Isaac Barrow'un *Elemanlar* çevirisi (solda)

Nasrettin Tus-i'nin *Elemanlar* çevirisinde dik üçgen teoreminin anlatıldığı sayfa (sağda) (Harvard Kütüphanesi'nden)



Öyleyse birinci önermenin kanıtı ne kullanacak? Öyle ya, daha önce hiçbir şey kanıtlamadı. Öklid onu da düşünmüş ve birinci kitabın tanımlarından sonra ve ilk önermeden önce beş belit ve beş genel kavram yazmış, geometri buradan başlayacak demeye getirmiştir.

Örneğin birinci belit iki noktayı birleştiren bir doğrunun mutlaka var olduğunu kabul eder. Böylece ilk önermede eşkenar üçgen için bir tepe noktası bulduğunuzda bunu diğer köşelere nasıl birleştireceğiniz sorusu kendiliğinden cevaplanmış olur.

Onuncu tanımda “Bir doğruya çizilen bir başka doğru iki komşu açıyı eşit kılıyorsa her iki açıya da dik denir” diyerek dik açıyı tanımlar. Dördüncü belit ise tüm dik açılar bir birine eşittir der. İlk okuyuşta buna ne gerek vardı deriz, ama sonra düşününce bunun bize çalışacağımız uzayın her yerinin aynı olduğunu söylediğini anlarız. Düzlemin değişik yerlerinde tanıma göre oluşturacağımız dik açılardan biri diğer yerdeki dik açıdan farklı olmayacaktır. Bunu kanıtlayamayız. Bunun geçerli olacağı bir uzayda çalışmayı tercih ettiğimiz ilanımızdır dördüncü belit.

Ve matematik tarihinde başka hiçbir belirteç kullanmadan “beşinci belit” dendiğinde herkesin neden söz ettiğimizi hemen bildiği beşinci belite gelir sıra. “Eğer bir doğru parçası, iki doğruyu kestiğinde bu doğru parçasının aynı tarafındaki iç açılar toplamı iki dik açıdan küçükse, bu iki doğru o yönde uzatıldıklarında kesişir.” Bu doğruları istediğimiz kadar uzatabileceğimiz bir uzayda yaşamak istediğimizi ise ikinci belit-

te belirtmiştik bile. İki dik açı yerine 180 derece denmediğini ve bunun ne gibi bir incelik olduğunu sezmeyi de size bırakıyorum.

Diğer belitler çok kısa olduğu ve hiçbir ayrıntılı işlem gerektirmediği halde bu belitin bu kadar çetrefilli olması binlerce yıl matematikçileri bu belitin aslında bir önerme olarak kanıtlanabileceği inancına itmiştir. Nice büyük yetenek bu beliti diğer belitler yardımıyla kanıtlamaya çalışarak heba olmuştur. Ancak on dokuzuncu yüzyılda bu ifadenin gerçekten bir belit olduğu ve bu belit olmadan da tutarlı ama farklı geometriler oluşturulabileceği anlaşılmıştır. Öklid herhalde yukarıdan bakıp “ben size bin yıl önce demiştim zaten” diye geçirmiştir içinden.

## Genel Kavramlar

Bir önermeyi kanıtlarken elbette eşit olan değerlere aynı değeri ekleyip sonucun yine eşit olacağını bir ara söyleyeceğiz. Orada birisi bizi durdurup “bunu daha önce kanıtlamış mıydık” diye sorabilir. Elbette bu çok aşikâr bir sonuç, ama zaten soruyu soran da bu aşikâr değil demiyor. Temelden başlayıp geometri kuruyoruz diye yola çıktık, bu kullandığımız yöntemi hangi temelin üzerine koyacağız diye soruyor. Öklid bu soruyu da önceden görüp bu ve bunun gibi toplam beş kavramı sorgulamadan kabul edeceğimiz genel kavram olarak yazmıştır. Örneğin bir şey kendisine eşit midir? Eşit kavramını kullandığımız yerlerde söz konusu olan şeyler hep farklı oluyordu. İhtiyaç duyduğumuzda bu eşitlik

kavramını aynı şey için kullanalım mı? Öklid “evet, kullanacağız” diyor. Yine hatırlatayım ki burada önemli olan söz konusu işlemin zorluğu, kolaylığı veya aşikâr olup olmaması değil. Konu, biz bunu başka kavramlar kullanarak kanıtlayabilir miyiz konusudur.

Elbette her şey kendisinden önce kanıtlanan önermeler kullanılarak kanıtlanır, ama ne kadar geriye gidebiliriz ki? Bir yerde durmak ve bazı kabuller yapmak gerek. İşte o kabullerin nerede yapılacağını en isabetle teşhis eden Öklid olmuştur. Yoksa ondan önce de *Elemalar* adıyla aynı amaçla pek çok kitap yazılmış ama onlar zaman içinde gelen sorulara ve eleştirilere cevap veremediklerinden kalıcı olamamıştır.

## Kanıtlar

Öklid’in kanıtlama yöntemi insanlık düşünce tarihine damga vurmuş ve bugün hâlâ geçerli olan bir yöntemdir. Her şey daha önceden kanıtlanan ya da kabul edilen belitler ve genel kavramlar kullanılarak kanıtlanmalı. Kanıtın başında neyin kanıtlanacağı açıkça belirtilir. Kanıt belirlenen ilkeler doğrultusunda sürer ve bitince de kanıtın içinde ortaya gelinceye kadar yapılanlar kast edilerek “bundan dolayı” diye başlayan cümle, önerme metnini aynen tekrarlar. Kanıt o meşhur “kanıtlanmak istenen de tam olarak buydu” cümlesiyle biter, ki bunun Latincesi olan *Quad Erat Demonstrandum* ifadesinin baş harfleri olan QED her matematik öğrencisinin en çok kullandığı kısaltmadır.



Eski insanların parşömen pahalı diye yer ziyan olmaması için kelimeleri bitişik yazmasını anlayamayız, ama Öklid çevirilerinde o “bundan dolayı” diye başlayan cümleye sıra gelince, hem üşendiğimizden hem de yer ziyan olmasın diye koca önermeyi tekrar etmez fakat Öklid’in tekrar ettiğini de hatırlatmak için “bundan dolayı vs” yazar geçeriz. Öbür tarafta Öklid hesap sorarsa ne diyeceğimizi bilmiyorum.

## On Üçüncü Kitabın Son Önermesi

Her şeyin iğneyle kuyu kazar gibi ilerlediği, bir kenarı bilinen bir eşkenar üçgenle yola çıkılan bu maceranın sonu üç boyutlu uzayda sadece beş tane Platonik cisim olduğunun kanıtıyla biter. Nereden nereye!

Platonik cisim dediğimiz üç boyutlu cisimler, yüzeyleri aynı eşkenar ve eşaçılı düzlem şekillerinden oluşan cisimlerdir. Örneğin küpün her yüzü karedir, kare ise kenarları ve açıları eşit olan bir düzlem şeklidir. Yüzleri eşkenar üçgen olan sadece dörtyüzlü, sekizyüzlü ve yirmi yüzlü cisimler vardır. Yüzleri düzgün beşgen olan sadece bir onikiyüzlü vardır.

Ve elbette bir de yüzleri düzgün dörtgen, yani kare olan bir altıyüzlü, yani küp vardır. Bunlardan başka yoktur. İşte *Elemanlar* bunun kanıtıyla biter.

Ama arada sadece geometri yapmakla kalmaz.

## İçindekiler

*Elemanlar*, kendisinden önce yazılmış diğer *Elemanlar* gibi var olan matematik bilgisini bir düzen içinde sunma iddiasında olduğundan özgün ve yeni sonuçlar içermez. İçindeki tüm bilgiler zamanın bilgilerinin Öklid’in binlerce yıla meydan okumuş seçiciliğiyle sunulmuş halidir. Bazı kanıtların, örneğin dik üçgen teoreminin kanıtının yeni olduğu ve Öklid’e ait olduğu düşünülse de kitabın önemi buradan kaynaklanmaz.

İlk kitaplar Plato, Pythagoras ve Thales gibi matematikçilerin geliştirdiği düzlem geometrisini, temel kavramlardan başlayarak kurar.

Beşinci kitap meşhur oranlar kitabıdır. Bir üçgenin bir kenarının diğer kenarına oranı, o kenarları ölçmek için kullanacağımız uzunluk biriminden bağımsız bir kavramdır ve orada kendiliğinden var olmakta, sadece o kenarlara özgü bir özellik

olarak bulunmaktadır. Böyle bir kavram olduğu için oranları, bin küsur yıl sonra icat edilecek cebirsel semboller yardımıyla çarpıp bölemeyiz. Öyleyse oran nedir, nasıl kullanılır? Üstelik ikizkenar bir dik üçgenin bir kenarıyla hipotenüsün oranı daha önce karşılaşmadığımız bir orandır. Ya buna bile benzemeyen başka oranlar varsa? Kaç çeşit oran olur? Bu ve buna benzer sorular yalnızca geometri bilgisiyle nasıl cevaplanır?

Beşinci kitapta bu soruları Öklid imrenilecek bir hassasiyetle ele alır. Öyle ki aradan geçen iki bin yılda cebir gibi yeni teknikler geliştirilmiş olmasına rağmen hâlâ konuyu sadece Öklid’in yöntemleriyle incelemenin önüne geçilmez bir cazibesi vardır ve *Elemanlar* sırf bu nedenle birkaç bin yıl daha okunmaya devam edecektir.

Beşinci kitaptaki bilgilerin Knidoslu Eudoxus’a ait olduğu düşünülür. Onuncu kitaptaki değişik sayı çeşitleri üzerine yapılan incelemelerin Sokrat’ın öğrencisi Theaetetus’a ait olduğu düşünülüyor.

*Elemanlar*’ın içeriğine ve kimlerin çalışmalarına dayanan bilgileri içerdiğine daha yakından bakacağımız bir yazıyı ilerde yazmaya söz verip *Elemanlar*’ın Türkçe çevirilerinden söz edeyim.



**Hüseyin Rifkı Tâmani**, Başhoca, mühendis, yazar. Osmanlı’da 1795 ile 1883 tarihleri arasında Mühendislik eğitimi vermiş olan Mühendishâne-i Berrî-i Hümayun’un, bir dönem başhocalığını yapan, mühendis ve alim.

Tamani’nin çevirisinde esas aldığı Bonycastle kopyası

## Türkçe'de *Elemanlar*

Öklid'in *Elemanlar*'ını kısmen de olsa Türkçeye ilk çeviren kişi III. Selim döneminde yaşamış olan Hüseyin Rıfki Tâ mânî'dir. Tâ mânî'nin *Elemanlar* çevirisi hakkındaki bilgileri bu konuda doktora çalışması yapan ve günümüz Türkçesine çeviren Ali Rıza Tosun'un kaynaklarda belirtilen kitabından alıyoruz.

Tâ mânî'nin zamanında artık Osmanlı fen konusunda ana kaynağın Batı'da olduğuna inanmıştı. O nedenle eğer bir Öklid çevirisi yapılacaksa Doğu âleminde var olagelen Arapça çevirileri esas almak kimseden saygı görmeyecekti. Gözler Batı'ya çevrilince iki çeşit kaynak arasında bir karar vermek gerekiyordu. Ya Öklid'i aslına sadık olarak aktarmış kitaplar ya da *Elemanlar*'ın sadece "günlük hayatta işe yarayacak" kısımlarını aktarmış kitaplar esas alınacaktı. Bu kararın verilmesinde III. Selim'in tavrı belirleyici olur. III. Selim askeriyenin işine yaramayan işlerle uğraşan bilim insanlarını Mühendishane'ye müderris olarak atamayacağını açıkça dile getirir. Böyle bir uyarı karşısında Tâ mânî İngiltere'de bir askeri akademi hoca olan John Bonnycastle'un sadece askeri eğitimde kullanmak için konuları seçerek yaptığı *Elemanlar* çevirisini esas almaya karar verir. Bonnycastle *Elemanlar*'ın 1-6. ve 11. kitabını ve 12. kitabın bir kısmını çevirmiştir. *Elemanlar*'ın sadece geometriyle ilgili kısımlarını çevirmeyi hedeflediğini söylemişse de Platonik cisimlerin incelendiği 13. kitabı çevirmemiştir. İşte Tâ mânî'nin III. Selim'in gazabına uğramamak için seçtiği kaynak Bonnycastle'un bu kitabıdır.

Son yıllarda Mimar Sinan Üniversitesi Matematik Bölümü hocalarından Özer Öztürk ve David Pierce *Elemanlar*'ın birinci cildinin, Yunanca aslına akademik bir sadakatle bağlı bir çevirisini yapıp geometriye giriş derslerinde okutmaya başladılar. Bu çeviriyi de kaynaklarda verilen bağlantıdan indirebilirsiniz.

Türkçe gibi son derece kıvrak anlatım olanakları sunan bir dile *Elemanlar*'ın bugüne kadar birkaç değişik çevirisinin yapılmış olması gerekirdi. James Joyce'un baş eseri *Ulysess* için, asıl yazıldığı dil olan İngilizceye bile çevrilmesi gereken bir roman benzetmesi yapılır. Dil ve anlam oyunları dolu olan bu roman her dile aynı başarıyla çevrilememiş, hatta birden fazla çevirisinin yapıldığı dil sayısı çok kısıtlı kalmıştır. Oysa Türkçede Nevzat Erkmen ve Armağan Ekici tarafından yapılmış birbirinden başarılı, *Ulysses* lezzetini rahatlıkla taşıyan iki çeviri vardır. Türkçe'nin bu olanaklarını matematik dünyasının bugüne kadar kullanmamış olması bir kayıptır. Bunu kısmen telafi etmek için *Elemanlar*'ın tamamını kapsayan bir çeviri projesine başladım. Kaynaklarda verilen bağlantıdan bu projenin safhaları takip edilebilir.

## Bitirirken

Binlerce yıl Batı ve Doğu medeniyetlerini eşit derecede etkilemiş olan *Elemanlar* kitabı sadece bir matematik kitabı değildir. Gerçeği açığa çıkarma çabasının ciddiyetini ve bunda gizli olan mutluluğu yakalayan, okuyucuda da bir an bu mutluluğu yakaladığı hissini uyandıran bir kitaptır.

Tüm fânilerin eserlerinde olduğu gibi hataları ve eksikleri vardır ama yine de sergilenen yöntemlerle bu kusurlar giderilir duygusunu hep ayakta tutan bir kitaptır. Bu dünyaya ait ama bambaşka dünyaların rüzgârını estiren bir kitaptır *Elemanlar*. İleride kitabın içinden örneklerle bu tezimizi destekleme sözümüzü yineleyip *Elemanlar* hakkında bir matematikçi olarak duyduğum heyecanı paylaşan bir şaire sözü bırakarak yazımı tamamlıyorum. Edna St. Vincent Millay'ın bu şiirini dilimize çeviren edebiyatımızın ustalarından Yusuf Eradam'ın muhteşem Türkçesiyle sizi baş başa bırakıyorum.



### SADECE ÖKLİD ETMİŞ SADE GÜZELİ TEMAŞA

*Ey gözü kör eden saat, Ey o mukaddes, gün ki ne dehşetli,  
Önce onun rüyetini işittiğinde, teşrih edilmiş fecirden çıkan şua!  
Sadece Öklid etmiş Güzeli temaşa.  
Ancak bir kereliğine duyanlar olacak Talihli,  
Üstelik çok uzaklardan, çıkan o sesi,  
Güzel'in muazzam çarığı konduğunda taş.*

### Kaynaklar

Tosun, A. R., Hüseyin Rıfki Tamani ve Elementler çevirisi, Atatürk Kültür Merkezi Yayınları, 2010.

Öztürk, Ö. ve Pierce, D., *Öklid'in Öğelerinin 13 Kitabından Birinci Kitap*, <http://mat.msgsu.edu.tr/~dpierce/Dersler/113/2015/oklid-yunanca-turkce-2015-09.pdf>

Sertöz, A. S., *Öklid'in Elemanlar*ı, <http://sertoz.bilkent.edu.tr/elemanlar.htm>

Heath, T., *The Thirteen Books of Euclid's Elements*, Dover Yayınları, 1908.

Fitzpatrick, R., *Euclid's Elements of Geometry*, <http://farside.ph.utexas.edu/Books/Euclid/Elements.pdf>