OLİMPİYAT SORULARININ ÇÖZÜMLERİ

Prof.Dr. Ali Osman ASAR

1987/4'ün Çözümü:

1. Çözüm (Vietnam tarafından verilmiştir)

Negatif olmayan tamsayılar (doğal sayılar) kümesi N ile gösterilsin. $f : N \to N$, $f(f(n)) = n + 1987$ şartını sağlayan bir f fonksiyonu olsun. Her $n \in N$ için

$$f(n + 1987) = f(n) + 1987 \qquad (1)$$

dir. Buradan, indüksiyonla, her $n, t \in N$ için

$$f(n + 1987t) = f(n) + 1987t \qquad (2)$$

elde edilir. Şimdi $0 \leqslant r \leqslant 1986$ olsun, $k, \ell \in N$ ve $\ell \leqslant 1986$ olmak üzere $f(r) = \ell + 1987k$ şeklinde yazılabildiğinden

$f(f(r)) = f(\ell + 1987k)$ dır.

Böylece tanımdan ve (2) den

$$r + 1987 = f(\ell) + 1987k \qquad (3)$$

elde edilir. r'nin seçiminden dolayı $k = 0,1$ dir.

$k = 0$ ise

$f(\ell) = r + 1987$, $f(r) = \ell$ ve $f \neq r$ dir

$k=1$ ise

$f(r) = \ell + 1987$, $f(\ell) = r$ ve $\ell \neq r$ dir.

Böylece f fonksiyonu $\{0, 1, \ldots, 1986\}$ kümesini $a \neq b$ ve

$f(a) = b$ ve $f(b) = a + 1987$ veya

$f(a) = b + 1987$ ve $f(b) = a$

şartını sağlayan (a, b) sıralı ikililerine ayırmaktadır. Fakat verilen kümenin eleman sayısı tek olduğundan bu bir çelişkidir.

2. Çözüm (Esas olarak Serdar Taşıran'ın çözümüdür).

Kolayca görüldüğü gibi f 1 - 1 dir.

$A = \{0, 1, \ldots, 1986\}$ ve $B = \{a \in A : f(a) \in A\}$ olsun. $c \in B \cap f(B)$ olsun. $c \in B$ olduğundan $f(c) \leqslant 1986$ dır. $c \in f(B)$ olduğundan $c = f(b)$ olacak şekilde $b \in B$ vardır. O zaman tanımdan dolayı

$$f(c) = f(f(b)) = b + 1987 \geqslant 1987$$

olduğundan bir çelişki elde edilir. Buradan $|B \cup f(B)| = 2|B|$ olduğundan $B \cup f(B) \neq A$ dır. $r \in A \setminus (B \cup f(B))$ olsun. $f(r) \geqslant 1987$ olduğundan

$$f(r) = k + 1987$$

olacak şekilde $k \in N$ vardır. Tanımdan dolayı $f(f(k)) = k + 1987$ ve f 1 - 1 olduğundan $r = f(k)$ elde edilir. $r \notin f(B)$ olduğundan $k = \ell + 1987$ olacak şekilde $\ell \in N$ vardır. Buradan (1) den dolayı

$$r = f(k) = f(\ell) + 1987$$

olduğundan $r \geqslant 1987$ elde edilir bu da bir çelişkidir. Bundan dolayı bu şekilde tanımlı bir f fonksiyonu yoktur.

1987/5'in Çözümü:

(Doğu Almanya tarafından verilmiştir)

$n \geqslant 3$ olsun. $i = 1, 2, \ldots, n$ olmak üzere $P_i(i, i^2)$ noktaları istenilen şartları sağlar.

1. $i \neq j$ için

$$\overline{P_i P_j} = \sqrt{(i-j)^2 + (i^2 - j^2)^2}$$

$$= |i-j| \sqrt{1 + (i+j)^2}$$

dir. $p, q \in N$ ve $(p, q) = 1$ olmak üzere

$$\sqrt{1 + (i+j)^2} = \frac{p}{q}$$

olsun. O zaman

$$1 + (i+j)^2 = \frac{p^2}{q^2}$$

olduğundan $p^2/q^2 \in N$ dir. Buradan $q^2 | p^2$ ve $q|p$ elde edilir. $(p, q) = 1$ olduğundan $q = 1$ dir. Böylece $1 + (i + j)^2$ bir tam karedir. Fakat

$$(i+j)^2 < 1 + (i+j)^2 < 1 + (i+j)^2 + 2(i+j)$$

$$= [1 + (i+j)]^2$$

olduğundan bu bir çelişkidir. Bundan dolayı $\overline{P_i P_j}$ uzunluğu irrasyoneldir.

2. $i \neq j \neq k \neq i$ olsun. P_i, P_j ve P_k aynı doğru üzerinde ise P_i ile P_j noktalarının ve P_j ile P_k noktalarının belirlediği eğimler eşit olmalıdır. Buradan

$$\frac{j^2 - i^2}{j - i} = \frac{k^2 - j^2}{k - j}$$

elde edilir. Sadeleştirilirse $j+i = k+j$ ve $k=i$ elde edilir. Bu bir çelişkidir. Bundan dolayı P_i, P_j, P_k noktaları dejenere olmayan bir üçgen belirler. Bu üçgenin alanı

$$\frac{1}{2}\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ i & j & k \\ i^2 & j^2 & k^2 \end{vmatrix} = \frac{1}{2}\,[\,jk(k-j) - ik(k-i) + ij(j-i)\,]$$

sayısının mutlak değeri olduğundan bir tamsayıdır.

1987/6'nın Çözümü

(Sovyetler Birliği tarafından verilmiştir)

$f(k) = k^2+k+n$ olsun. Kabul edelim ki $f(k)$ her $0 \leqslant k \leqslant \sqrt{\frac{n}{3}}$ tamsayısı için asal fakat en az bir $k = 0,1,\ldots, n-2$ değeri için asal olmasın. O zaman $n > 2$ dir. $f(k)$ değerinin asal olmadığı en küçük k değeri y ve $f(y)$'nin en küçük asal böleni q olsun. $n > 2$ olduğundan $q > 2$ dir. Aynı zamanda $q \leqslant \sqrt{f(y)}$ olduğundan $q^2 \leqslant f(y)$ dir.

Önce $q > 2y$ olduğunu gösterelim. Kabul edelim ki $q < 2y$ olsun.

$$f(y) - f(k) = (y-k)(y+k+1)$$

dir. Burada $k = 0,1,\ldots, y-1$ değerlerini alırsa $(y-k)$ çarpanı $1, 2, \ldots, y$ değerlerini ve $y+k+1$ çarpanı da $y+1, y+2, \ldots, 2y$ değerlerin alır. Böylece bir $1 \leqslant k \leqslant y-1$ için $q \mid (f(y) - f(k))$ dır. Buradan $q \mid f(k)$ ve $f(k) = q$ bulunur. Fakat

$$y - k \leqslant n - 2 < n + k + k^2 = f(k)$$

ve

$$y + k + 1 \leqslant n - 1 + k < n + k + k^2 = f(k)$$

olduğundan $f(k)$ sayısı $f(y) - f(k)$ yı bölemez. Bu çelişkiden dolayı $q > 2y$dir. (Şu şekilde de gösterilebilir. $y = aq + b$, $0 \leqslant b < q$ olacak şekilde $a, b \in N$ vardır. O zaman $q \mid f(y)$ olduğundan $q \mid f(b)$ olmalıdır. Buradan $y = b < q$ elde edilir. Aynı zamanda $q \mid f(q-y)$ ve q tek sayı olduğundan $y < \frac{q}{2}$ dir.)

Böylece $2y < q$ olduğundan $2y+1 \leqslant q$ dur. Öte yandan $q^2 \leqslant f(y)$ olduğundan

$$y^2 + y + n \geqslant (2y+1)^2 = 4y^2 + 4y + 1$$

dir. Buradan kolayca $y \leqslant \sqrt{\frac{n}{3}}$ elde edilir. Fakat $f(y)$ asal olmadığından bu çelişkidir. Bundan dolayı $f(0), f(1), \ldots, f(n-2)$ sayılarının hepsi asaldır.

ZEKASAYAR

(Geçen sayıdaki soruların cevapları)

TAMAMLAMA:

SAK	(AL)	TIN
TAN	(GO)	TİK
BA	(RİT)	İM
SAR	(MA)	SAL

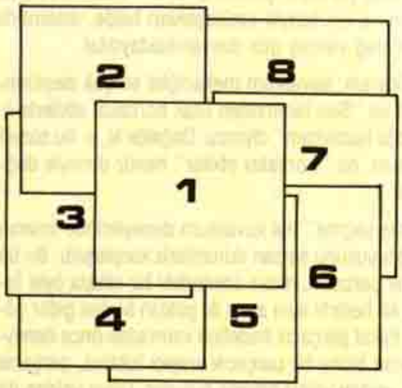
ALGORİTMA

BİSİKLETÇİLER: Aydın'ın bisikletine Cemal binmektedir.

SAAT KAÇ: Saat 1'e 1 var. A, 5 dakika, B,2 dakika, C, 4 dakika ve D, 3 dakika hatalıdır.

HANGİ SAYI: 24.

SEKİZ KARE:



120 SAYI: 120 sayının toplamı 3.999.960'dır.