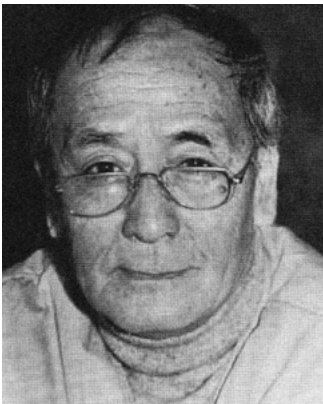


## Usta Kaptanlar

### MASATHOSİ GÜNDÜZ İKEDA:

25 Şubat 1926'da Tokyo'da doğdu. 1948'de Osaka Üniversitesi Matematik Bölümü'nden mezun oldu. Aynı yıl, mezun olduğu üniversitede çalışmaya ve Profesör Kenjiro Şoda'nın nezaretinde Frobenius cebirleri üzerindeki araştırmalarına başladı. 1953'te doktorasını tamamlayana kadar, elde ettiği sonuçlar dünya çapında dikkat çekmişti. Doktora sonrasında cebirden ziyade sayılar kuramına yönelen İkeda, Alexander von Humboldt Vakfı'nın bir bursuyla Helmut Hasse'nin davetlisi olarak 1957-1959 yıllarında Hamburg Üniversitesi'nde çalıştı. Hamburg'da tanıştığı Emel Ardor'la evlenerek Türkiye'ye geldi. Ege Üniversitesi Tıp Fakültesi'nde yarı zamanlı olarak kısa bir süre istatistik dersleri verdikten sonra, 1961'de aynı üniversitenin matematik bölümüne, 1968'de de Orta Doğu Teknik Üniversitesi Matematik Bölümü'ne geçti. 1992'de emekli olana kadar seçkin eserler verdi, yurttan ve yurtdışında çeşitli etkinlikler faaliyetler çerçevesinde Türk matematiğinin en seçkin temsilcilerinden biri oldu. Emeklilik yıllarını Kuzey Kıbrıs Doğu Akdeniz Üniversitesi'nde, TÜBİTAK Gebze Araştırma Merkezi'nde, Feza Gürsey Enstitüsü'nde geçirdi. Ömrünün sonuna kadar hiç ara vermeden matematik araştırmalarını sürdürdü. Çok bilgili, mütefekkir, nükteli, muhtelif yabancı dillere vakıf, çevresindekilerin sevgi ve saygısını hakkıyla kazanmış, hizmetleri Türk matematik camiası tarafından asla unutulmayacak büyük bir insandı. 2003'te kısa bir hastalık döneminden sonra vefat etti.

(Cem Tezer, ODTÜ Matematik bölümü öğretim üyesi)



## Olimpik Havuz

### DİK DOĞRULAR

Dar açılı bir  $ABC$  üçgeninde  $D$  ve  $E$  sırasıyla  $A$  noktasından  $BC$  kenarına ve  $B$  noktasından  $AC$  kenarına indirilen dikme ayaklardır.

$AD$  çaplı çember,  $AC$  ve  $AB$  kenarlarını  $A$  noktası dışında sırasıyla  $F$  ve  $G$  noktalarında kesiyor.  $BE$  doğru parçası  $GD$  ve  $GF$  doğrularıyla sırasıyla  $X$  ve  $Y$  noktalarında kesişiyor.

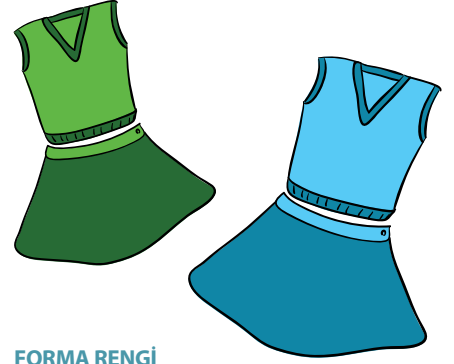
$DY$  ile  $AB$ ,  $Z$  noktasında kesiştiğine göre  $XZ$  ile  $BC$  doğrularının birbirine dik olduğunu gösteriniz.

### DENKLEM SİSTEMİ

$$x + y - z = 12$$

$$x^2 + y^2 - z^2 = 12$$

denklem sistemini sağlayan kaç pozitif  $(x, y, z)$  tam sayı üçlüsü vardır?



## Eğlence Havuzu

### 100 ELDE ETME

Tablodaki sayıların (sırasını değiştirmeden) aralarına sadece  $+$ ,  $-$ ,  $\times$  veya  $/$  sembollerini koyarak ve istediğiniz kadar parantez kullanarak 100 elde edebilir misiniz?

### Örnekler:

5, 5, 9, 8 ve 3 sayıları kullanılırsa  
 $5 / 5 + 9 \times (8 + 3) = 100$  elde edilir.  
 7, 4, 3, 6 ve 2 sayıları kullanılırsa  
 $7 \times 4 + (36) \times 2 = 100$  elde edilir.

1	78499
2	868577
3	144248
4	428485
5	9191455
6	8663645



### BENZER ŞEKİLLER

Şekildeki eşkenar üçgen üç eş parçaya ayrılmıştır. Eşkenar üçgeni ikisi eş (diğeri bunlarla eş olmayan) üç benzer parçaya ayırabilir misiniz?  
 Not: Bir şekil diğeri belirlenmiş bir oranda küçültülmesi ile elde ediliyorsa bu şekillere "benzer şekiller" adı verilir.

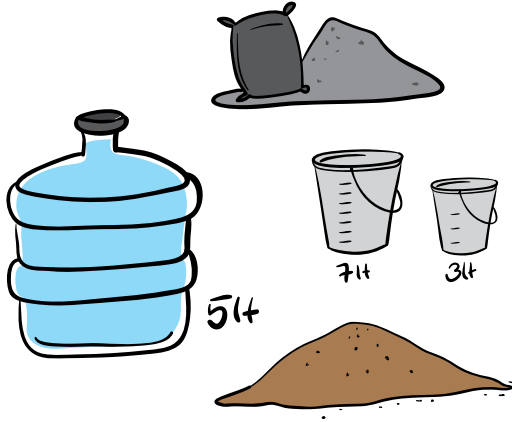
### KİTAP KAÇ LİRA?

Güneş bir kitap satın aldığı kitapçıdan çıkarken aklından şunlar geçmektedir: "Kitapçıdan çıkarken cebimdeki para, kitapçıya girerken cebimde bulunan paranın yarısı. Şu andaki kuruşlar, kitapçıya girerken önceki liralardan miktarına eşit, liralardan önceki kuruşların yarısına eşit." Güneş, satın aldığı kitap için kaç lira ödemiştir?

## Kum Havuzu

### KARIŞIM

Havuzdaki çatlağı onarmak isteyen Eyüp Usta yeterli miktarda kum ve çimentoyu 5 litre suyla karıştırarak harç hazırlayacaktır. Suyu ölçebileceği iki kovadan biri 7 litrelik, diğeri 3 litreliktir. Eyüp ustaya yardımcı olabilir misiniz?



## Süs Havuzu

### REKORTMEN ASALLAR

2013 yılı itibarı ile bilinen en büyük asal sayı, 10 tabanına göre yazıldığında 17.425.170 basamağı olan  $2^{57885161} - 1$ 'dir.

Tüm zamanların en küçük asal sayısı ise 2'dir.



## Kapalı Havuz

Stramboşe Krallığı'nda krala karşı işlenen suçlar hakkında mahkeme kesin kararını verdikten sonra kral mahkûmlara, cezalarını azaltma fırsatı tanımak amacı ile bazı oyunlar oynatır.

### On Şapkada On Sayı – Bilen Kurtulur

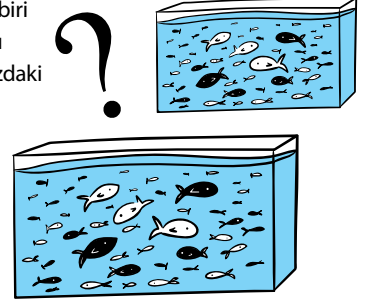
Bu oyunu oynayacak olan on mahkûm bir araya getirilir ve oyunun kuralları açıklanır. "Biraz sonra başlarınıza, üzerinde 1'den 10'a kadar birer tam sayı yazılı şapkalar takılacak. Her sayı bir kaç kez kullanılmış veya hiç kullanılmamış olabilir. Kendi başınızdaki hariç herkesin şapkasındaki sayıyı görebilirsiniz. Şapkalar takıldıktan sonra aranızda konuşmanız, yazışmanız, işaretlemeniz kısaca herhangi bir şekilde bilgi alış veriş yapmanız yasak. Sonra aranızdan birisi rastgele seçilerek şapkasındaki

### SAYFA SAYISI

Sayfa numaralarını yazmak için toplam 1200 rakamın kullanıldığı bir kitap kaç sayfadır?

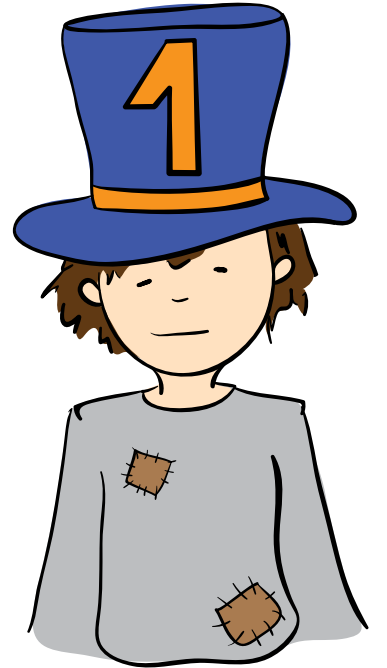
### BALIKLAR

Büyük bir havuzda çok sayıda beyaz ve siyah balık, yakındaki küçük bir havuzda ise 2013 beyaz, 2014 siyah balık var. Defne her seferinde küçük havuzdan rastgele iki balık yakalıyor. Balıkların ikisi de beyaz ise bu balıkları büyük havuza atıp büyük havuzdan yakaladığı siyah bir balığı küçük havuza atıyor. Balıklardan en az biri siyah ise büyük havuza siyah bir balık atıp, diğer balığı tekrar küçük havuza atıyor. Her seferinde küçük havuzdaki balıkların sayısı bir azalıyor. Küçük havuzda son kalan balık ne renktir?



$$\sqrt{2^{22}} - (2 + 2 + 2)^2 + 2 = 2014$$

sayıyı tahmin etmesi istenecek. Hepiniz bu tahmini duyabileceksiniz. Tahmin doğru ise seçilen mahkûm affedilecek, aksi takdirde hücrasına geri dönecek. Sonra bir başkası seçilecek ve bu işlem son mahkûma kadar tekrarlanacak. Şapkaları takmadan önce bir saat süreniz var. Aranızda istediğiniz stratejiyi belirleyebilirsiniz. Ama unutmayın, bu süre dolduktan sonra hiç bir şekilde birbirinizle konuşamayacak, işaretlemeyeceksiniz." Mahkûmlar, en az beşinin affedilmesini garantileyecek bir strateji belirleyebilir. İkişer ikişer eşleşirler ve eşlerden ilk çağrılan, kendi şapkasındaki sayıyı tahmin etmek yerine, eşinin şapkasındaki sayıyı söyler. Böylece en az beş mahkûmun salıverilmesi garanti edilmiş olur. Daha çok mahkûmun kurtulmasını sağlayacak bir strateji belirleyebilir misiniz?



Çizimler: Rabia Alabay

## GEÇEN SAYININ ÇÖZÜMLERİ

### Kum Havuzu

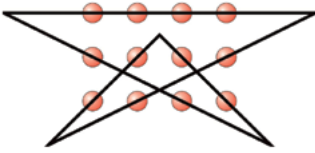
#### HAVUZ İŞLERİ

Cevap: Fayanslar tarafından belirlenen doğrular ile havuz tabanı  $308 \times 105$  birim kareye ayrılmıştır. Köşegen doğrusu, toplam  $308 + 105$  tane olan dik veya yatay doğrulardan her birini kestiğinde sökülmesi gereken bir parkeyi belirler. Fakat bu doğru bir parke parçasının köşegenine denk geldiğinde hem yatay hem de dikey doğruları, yani iki doğruyu birden keser. Bu durumda sökülmesi gereken bir parke iki kez sayılmış olur. Bu konumda bulunan parke sayısı  $308$  ile  $105$ 'in ortak bölenlerinin en büyüğü kadardır, yani  $7$  tanedir. Dolayısıyla cevap  $308 + 105 - 7 = 406$ 'dır.

#### SAATLER

100 saniye fark vardır.

#### NOKTA BİRLEŞTİRMECE



### Eğlence Havuzu

#### 100 ELDE ETME

- |    |                  |  |
|----|------------------|--|
| 1. | 5 7 6 6 4:       | $100 = 576 / 6 + 4$                                      |
| 2. | 1 2 3 4 5 6:     | $100 = -1 + (23 - 4) \times 5 + 6$                       |
| 3. | 1 2 3 4 5 6 7:   | $100 = 1 + 2 + 34 + 56 + 7$                              |
| 4. | 1 8 4 5 8 9 7 4: | $100 = 18 - (4 + 5) - 8 + 9 \times (7 + 4)$              |
| 5. | 8 1 8 1 9 6 8 2: | $100 = 8 \times 1 + (8 - (1 + 9) + 6 \times 8) \times 2$ |
| 6. | 3 1 3 3 8 2 7 4: | $100 = (3 + 1) + (3 / 3 + 8 \times 2 + 7) \times 4$      |

(Doğru cevap gönderen okurlarımız: Elif Tuncel, Tarık Özdemir, Zeynel Abidin Emir, Nazan Özkan, Atakan Cemhan, Hasan Üstün Başaran, Melike Karataş, Bayram Yıldız, Kerem Aksak, Yunus Bayar, Yağmur Candan, Miray Çiftçi, Yusuf Yücepete)

### UÇAK BİLETİ

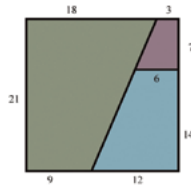
İlk durumdaki şehirlerin sayısına  $x$  dersek, bu durumda basılı biletler için farklı türlerin sayısı  $x(x - 1)$  dir. İlgili sahasına yeni giren şehirlerin sayısına  $y$  dersek son durumdaki bilet türlerinin sayısı  $da (x + y) (x + y - 1)$  olur. İki ifade arasındaki fark  $2xy + y^2 - y$  olup bu ifade  $46$ 'ya eşittir. O halde  $(2x + y - 1)y = 46$  yazabiliriz.  $x$  ve  $y$  tam sayılar olduğundan,  $y$  sayısının  $46$ 'nın pozitif bir böleni olduğu anlaşılır.  $y$  nin alabileceği değerler  $1, 2, 23$  ve  $46$ 'dır.  $y = 1$  durumunda  $x = 23$ ,  $y = 2$  durumunda  $x = 11$ ,  $y = 23$  ve  $y = 46$  durumları ise  $x$  negatif olacağı için imkânsızdır.

Tüm durumlar incelendiğinde mümkün olan çözümlerin  $y = 1$  veya  $y = 2$  olduğu anlaşılır. Bu durumda da sırasıyla  $x = 23$  veya  $x = 11$  olur. Sonuç olarak, bu problemde "biraz"  $1$  veya  $2$  dir.

(Doğru cevap gönderen okurlarımız: Elif Tuncel, Tarık Özdemir, İlknur Bulut, Ergüven Özkan, Zeynel Abidin Emir, Bilal Özdemir, Gökçe Aras)

### BENZER ŞEKİLLER

(Doğru cevap gönderen okurlarımız: Burak Dikmen, Erhan Erdoğan)



### Kapalı Havuz

#### BİR MAHKUM - ON KUTU PİRİNÇ

En çok sayıda pirincin  $t$  numaralı kutuda olduğunu kabul edelim. Eğer  $t \leq k$  ise mahkûm oyunu kaybeder.  $t > k$  olması durumunda ise, mahkûmun kazanabilmesi için ilk  $t - 1$  kutudan en çok pirinci içeren kutunun ilk  $k$  kutu içinde olması gerekir.

Sonuç olarak, kazandıran kutu  $t$ . kutu ise, mahkûm bu kutuyu  $k / (t - 1)$  olasılığı ile bulabilir.  $t$  nin alabileceği değerler  $k + 1, k + 2, \dots, n$  olup her birinin gerçekleşme olasılığı da  $\frac{1}{n}$  olduğundan mahkûmun kazanma olasılığı

$$p_k = \frac{1}{n} \left( \frac{k}{k} + \frac{k}{k+1} + \dots + \frac{k}{n-1} \right) = \frac{k}{n} \left( \frac{1}{k} + \frac{1}{k+1} + \dots + \frac{1}{n-1} \right) = \frac{k}{n} (H_{n-1} - H_{k-1})$$

olarak bulunur (İfadede yer alan  $H_n$ , harmonik sayısının tanımı ve özellikleri için Bilim ve Teknik Dergisi, 2013 yılı Nisan Sayısı, Matematik Havuzu'na bakınız). Gerekli hesaplamaları yaparak  $p_1 = 0,183$ ,  $p_2 = 0,366$ ,  $p_3 = 0,399$ ,  $p_4 = 0,398$ ,  $p_5 = 0,373$ ,  $p_6 = 0,327$ ,  $p_7 = 0,265$ ,  $p_8 = 0,189$ ,  $p_9 = 0,100$ ,  $p_{10} = 0,000$  olduğunu görebiliriz. Sonuç olarak,  $k = 3$  seçilmesi durumunda mahkûmun kurtulma olasılığı  $0,399$ 'dir ve bu, ulaşılabilecek en yüksek değerdir.

Problemin genelleştirilmesi.  $10$  kutu yerine  $100$  kutu,  $1000$  kutu veya  $1.000.000$  kutu olsaydı, yukarıdaki yöntemi kullanmamız gerekecekti. Öte yandan,  $p_k$  olasılığının en büyük değerine  $k = k_0$  için ulaştığını varsayarsak  $p_{k_0} > p_{k_0+1}$  ve  $p_{k_0} > p_{k_0-1}$  eşitsizliklerinin sağlanması gerekir.

Bu eşitsizlikler birleştirilerek  $H_{k_0-1} < H_{n-1} - 1 < H_{k_0}$  elde edilir.

$H_n \approx \ln n + \gamma$  yaklaşıklığını kullanarak,  $k_0 \approx \frac{n-1}{e}$  bulunur.

Buradan hareketle, büyük  $n$  değerleri söz konusu olduğundan, en isabetli seçim için  $0,3678 (n - 1)$  sayısının tam değerinin alınabileceği anlaşılır. Örneğin  $n = 100.000$  durumunda  $k = 36.788$  elde edilir.

(Doğru cevap gönderen okurumuz: Zeynel Abidin Emir)

### Olimpik Havuz

#### ASAL SAYI ÇİFTLERİ

$p = 3$  için çözüm olmadığı rahatlıkla görülebilir.  $p \neq 3$  için mod  $3$ 'te bakarsak  $2p^2 + 1$  ifadesi  $3$  ile bölünür. Bu durumda  $q = 3$  ve  $p = 11$  bulunur.

(Doğru cevap gönderen okurlarımız: Ergun Erdoğan, Osman Akar)

### KAREDEKİ ÜÇGEN

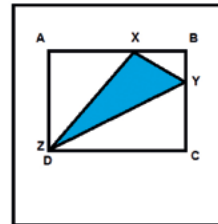
Üçgenin  $X, Y, Z$  köşelerinden kenarlara paraleller çizelim. Genelliği bozmadan,  $X \in [AB]$ ,  $Y \in [BC]$  ve  $Z \in [CD]$  olacak şekilde üçgenin mümkün olan en küçük  $ABCD$  dikdörtgeninin içinde olduğunu kabul edelim. Bu durumda:

$$A(XYZ) \leq A(AYZ) \leq \frac{A(ABCD)}{2} \leq \frac{1}{2} \text{ olur.}$$

Üçgenin köşelerini karenin köşelerinde seçersek üçgenin alanı

$$\frac{1}{2} \text{ olduğu için cevap } \frac{1}{2} \text{ olarak bulunur.}$$

(Doğru cevap gönderen okurumuz: Burak Dikmen)



### CANKURTARAN EKİBİ

Ali Doğanaksoy,  
Çetin Ürtiş,  
Enes Yılmaz,  
Fatih Sulak,  
Muhiddin Uğuz,  
Zülfükar Saygı.



Değerli okurlarımız,  
Eğlence Havuzu, Kapalı Havuz ve  
Olimpik Havuz köşelerinde yer alan  
problemlerden herhangi birinin  
doğru çözümünü gönderen  
ilk iki okuyucumuza TÜBİTAK  
Popüler Bilim Kitapları'ndan birer  
kitap hediye edeceğiz.  
Çözümlerinize birlikte posta  
adresinizi de soruların yayımlandığı  
ayın ilk 15 günü içinde  
[matematik.havuzu@tubitak.gov.tr](mailto:matematik.havuzu@tubitak.gov.tr)  
adresine göndermeniz gerekiyor.