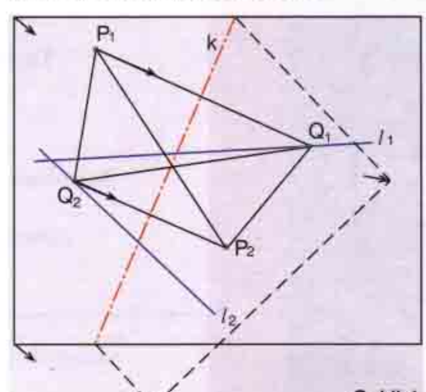
İdeal Kâğıt, Cetvel-Pergel'e Karşı
Açıyı Üçe Bölmek

Açıyı üçe bölmekten ne anlaşılması gerektiğini hatırlıyor musunuz? 360 derece ve onun 2'ye, 4'e, 8'e, ...2^n'ye bölünmesiyle elde edilebilecek açılar dışında, herhangi bir açının üç mutlak eşit parçasından birinin geometrik olarak elde edilmesidir istenilen. "Geometrik olarak" ise, "sadece cetvel ve pergel işlemleriyle" dar anlamına geliyor. Bunun tabu olduğuna inananlardansanız, Bilim ve Teknik'in 364. sayısı (Mart, 1998) sizi hazırlıksız yakalamış olmalı. Derginin 33. sayfasında, "Açı Nasıl Üçe Bölünür?" başlığı altında, serinkanlılıkla "İşte böyle ..." deniyor, "1. ...2. ...3. ...".

Okul yıllarında karşılaştığımız, öğrenilen matematikle çelişkili gibi görünen, ikinin beşe eşit olduğunu ispatlamak, 19 deveyi parçalamadan üç oğula bölüştürmek gibi acaiplikler arasında, bazan açıyı üçe bölmek de yer alırdı. Sergilenen "ispat"ların bozuk halkasını her seferinde keşfedemesek de, yalnız cetvel ve pergel kullanarak mümkün olmadığını birilerinden duyduktan sonra, açıyı üçe bölmeyi yasaklar listesine kaydedip rahatlamıştık. Ama şimdi Hisashi Abe adında biri, iddiaya göre, üçe bölemediğimiz açımızı üzerine çizmiş olduğumuz kâğıdı alıyor; hepimizin bildiği katlama-açma operasyonlarını uygulayarak bölüveriyor üç eşit parçaya. "Olamaz!" deseniz de, ispat karşınızda; çerçeve içinde tekrar veriyoruz.

Origamide usta olmasak bile, yöntemde önerilen işlemler, mektup katlamadan kâğıt uçak, kayık yapmaya, alışık olduğumuz, hattâ zevk aldığımız şeyler. "Katlama" deyince bize çok basit, kolay, ve kesin birşeymiş gibi geliyor. Şu ucu buradan katlayacaksın; bu kenarla ötekini üstüste getirip tekrar katlayacaksın, sonra açıp bir de şuradan şöyle katlayınca... Bir de bakıyorsunuz açı üçe bölünüvermiş. Acaba gerçekten de o kadar kolay mı? Cetvel-pergele (C-P) boyun eğmeyen bir problem katlamaya niçin yenilsin? Acaba katlama ile C-P işlemleri arasında kendini pek de açıkça göstermeyen bir bağ, bir eşdeğerlilik olamaz mı? Yoksa katlamanın C-P ikilisine göre bir üstünlüğü mü var?

Önerilen bazı işlemlerin rahatça yapılamayabileceği, hattâ belki de mümkün olmayabileceği izlenimi veren bir takım ipuçları var satır aralarında. 2. adımda, aşağıda tanışacağımız (O6) aksiyomu uygulanırken, "Bunu yapmak kolay olmayabilir! (Daha doğrusu öyleymiş, çünkü denemeye cesaret dahi etmiyorum.)" yorumuyla karşılaşıyoruz. Üstelik bir yorum daha: "*Belki birkaç deneme*yle katlama için *doğru* yer belirlenebilir." (İtalikler bizden.) İş denemeye kaldıysa, pergelle uygulanabilecek *birkaç deneme*yle, her açı *belki doğru* şekilde üçe bölünebilirdi. Veya, denenmesi sizi rahatsız etmeyecekse, pergelle bir türlü bölemediğiniz açılarınızı teslim edin Hisashi Abe'ye; sonuç garantili. Niçin garantili? Çünkü yukarda sözü edilen üç adımda bir matematiksel ispat gerçekleşiyor. Ergo: Her açı, kâğıt katlamanın karşı konulamaz avantajları sâyesinde pekâlâ üçe bölünebilir!



Şekil 1

Huzita'nın (O6) Aksiyomu: Üzerinde P_1, P_2 noktaları ve l_1, l_2 doğruları belirlenmiş olan bir kâğıt, P_1 noktası l_1, P_2 noktası l_2 üzerine gelecek şekilde katlanabilir. k katlama eksenini gösteriyor. Buna dik olan P_1Q_1 ve P_2Q_2 doğruları paraleldir. Ayrıca, $P_1Q_2 = Q_1P_2$ ve $P_1P_2 = Q_1Q_2$ dir. Q_1, Q_2 ve k'yı cetvel-pergel kullanarak bulabilir misiniz?

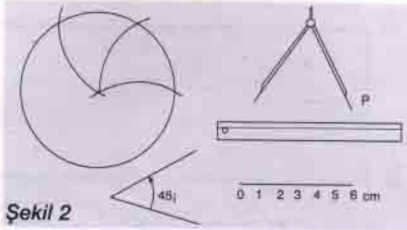
İleri sürülen yöntemin nihai başarısı, üzerine kurulduğu ve kâğıt katlamayla ilgili aksiyomlara, özellikle de onlardan birine dayanıyor. Bu aksiyom, Humiaki Huzita adında başka bir ustanın altı aksiyomundan, yani Origami Aksiyomları'ndan, (O6) kimliğini taşıyan sonuncusu. Şöyle tanıtılıyor (O6) bir önceki sayfada: "p_1 ve p_2 noktaları ile l_1 ve l_2 doğruları verildiğinde, p_1 noktasını l_1 ve p_2 noktasını l_2 doğrusu üstüne getirecek bir katlama yapabiliriz." Abe'nin açıyı üçe bölme yöntemini bir zincire benzetirsek, onu geliştirirken dayandığı en kritik halka bu. Halkayı ödünç aldığı Humiaki ustaya ne kadar güvenebiliriz? Acaba aksiyomunda yanılmış olamaz mı? Eğer, "Aksiyom aksiyomdur; doğruluğundan ya da yanlışlığından söz edilemez, onlar üzerlerine teoremlerin kurulması için yapılmış varsayımlardır." diyorsanız, o zaman, "Bir açı C-P ile üçe bölünebilir." de bir aksiyom olarak kabul edilemez miydi? Belki de, sadece C-P kullanarak yapılabilen öteki işlemleri tanımlayan aksiyomlara o da eklenseydi, sorun ortadan kalkardı.

Bu altıncı aksiyomu kendinden önceki beş aksiyomla karşılaştırsaydınız şunu görecektiniz. Huzita'nın (O1)-(O5) aksiyomları, katlamada yeterli el beceriniz olmasa bile, C-P yardımıyla buluvereceğiniz, katlama ekseni, katlamadan sonra üstüste gelecek noktalar veya çizgiler yardımıyla kolayca ve sonlu sayıda operasyonla gerçekleştirebileceğiniz şeyler. Halbuki (O6) pek öyle gibi görünmüyor. Şekilde (O6) nın nasıl elde edildiğini görüyorsunuz. Kâğıdı noktalı çizgiyle gösterilen katlama ekseni k'dan katlarsanız, kâğıdın soldaki kanadı sağda kesik çizgiyle gösterilen konuma gelirken, P_1 noktası l_1 doğrusunun Q_1 noktasına, l_2 doğrusunun Q_2 noktası da P_2 noktasına konuşlanır. Aşağıda "katlama"dan ne anlaşılması gerektiğini gözden geçireceğiz. Ona göre, bütün mesele k eksenini bulmaya indirgenebilir. Bunun için ise Q_1 ve Q_2 noktalarından birini bulmuş olmanız yeter. İyi ama nasıl? "Katlayarak" diyemezsiniz, çünkü henüz katlamayı yapacağınız ekseni bilmiyorsunuz. Aklınıza C-P geliyorsa, işte çözmenizi bekleyen çizim problemi: P_1 ve P_2 den geçen öyle iki paralel doğru çizin ki, bunlardan ilki l_1 i Q_1, ikincisi de l_2 yi Q_2 noktalarında kesiyorsa, $P_1Q_2=Q_1P_2$ ve $Q_1Q_2=P_1P_2$ olsun. Peki, bunun C-P çözümü var mı? Unutmayın, işin sonunda l_1 ve l_2 arasındaki açının üçe bölünebilmesi yatıyor. Q_1 veya Q_2 yi bir kere elde ettiyseniz, l_1 ile l_2 arasındaki açıyı bölmek için geriye kalan işlemler, C-P ile rahatça tamamlayabileceğiniz şeyler. Belki siz de bu çizimin başarılı olacağından ümidinizi kesmeğe başladınız. Eğer öyleyse, geriye kalan tek ümit kapısı, katlamanın C-P yönteminden üstün olabileceği ihtimaline açılıyor; ve insan, kâğıt katlama ile C-P işlemleri arasında ne gibi ilişkiler olabileceğini, veya aralarında bazı bağımsızlıklar bulunup bulunmadığını düşünmeden edemiyor.

Niçin Cetvel ve Pergel?

Çoğumuzun hiç değilse ilköğrenim sırasında kullandığımız bu çizim âletlerinin özellikleri ne? Niçin başka âletler, meselâ terzilerin kullandığı eğri cetvel, spiral çizme düzeneği, birbirine eklemlenmiş dört çubuklu bir mekanizma kabul edilmiyor da, sâdece düz bir kenarı olan cetvelle, değişik yarıçaplarda daire çizebilen pergele izin veriliyor? Çünkü bunlar düzlem geometride (Euclid geometrisi) çok temel olan çok basit iki işlemi gerçekleştirmek için yegâne basit âletler.

- İki noktayı birleştiren tek bir doğru çizgi vardır, ve cetvel bu çizgiyi çizmemizi sağlar; yani bu doğru çizgi üzerindeki bütün noktaları cetvel yardımıyla bulabiliriz.



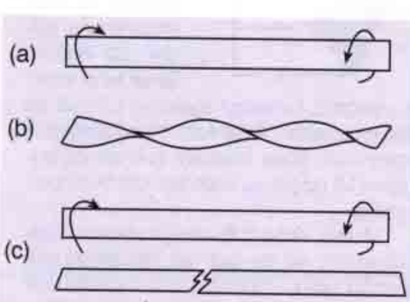
Şekil 2

Sâdece cetvel ve pergel kullanarak, a) daireyi altıya, b) 45° yi üçe, c) 6 cm'lik doğru parçasını yediye, bölebilir misiniz?

- İki nokta arasındaki uzaklığı (ki bu en kısa yol demektir) başka bir yere pergel kullanarak taşıyabiliriz.

Tabii burada ideal bir cetvelden, ideal bir pergelden ve ideal işlemlerden söz ediyoruz. Gerçek cetvel ve pergeldeki hatâlar, onlarla birlikte kullandığımız kalem ucunun kalınlığı, kâğıdın kalitesizliği, bizim yapabileceğimiz yanılgı ve beceriksizlikler elde edeceğimiz sonucu önemli ölçüde etkiler. İsterseniz pergelinizle bir daire çizip, sonra da üzerindeki bir noktadan başlayarak, pergel aralığını bozmadan, çevresinde altı adım atarak başladığınız noktaya dönmeye çalışın. Teorik olarak bunun mümkün olduğunu biliyoruz. Ama, ne kadar titiz ve dikkatli olursanız olun, tam tamına aynı noktaya dönmek için sonsuz şansınız olması gerek. Göremediğiniz hatâlar mikroskop altında mutlaka görünür. Benzer şekilde, bir doğru parçasının bir tek orta noktası vardır, ama siz, her deneyişinizde ona çok yakın başka başka orta noktalar bulursunuz.

Bunlar hiç önemli değil. Asıl olan, ancak düşüncemizde yer alan ideal noktalar, ideal doğrular, ideal daireler, ideal eşitlikler, ve ideal işlemler. Ne gerçekten çizgi çizmemize gerek var, ne de nokta göstermemize. Zaten bütün ispatlarımızı da düşünce uzayında yapmıyor muyuz? Eğer bunu yaparken, düşüncelerimizi biraz somutlaştırarak düşünce akışını kolaylaştırmak üzere şekillere başvurmak ihtiyacını duyuyorsak, onu bile sâdece kalem ve kâğıt kullanarak, elle çiziyoruz. Yani çizim daima yardımcı; ne kadar mükemmel, ya da ne kadar kaba olursa olsun! Böylece, ancak düşüncemizde var olan ideal cetvel ve ideal pergelle yapabileceğimiz bakın neler var: Belli bir noktadan geçen herhangi bir doğruyu, veya belli iki noktanın ikisinden de geçen doğruyu çizmek; merkezi verilen bir nokta olan, belli yarıçapta daire çizmek (yani o noktadan uzaklıkları belli bir uzunluğa eşit olan bütün noktaları elde etmek); verilen bir açıya eşit bir açı kurmak; bir doğru parçasını tam sayıda eşit parçalara bölmek; bir açıyı iki, dört,...2^n eşit parçaya bölmek; elips, parabol veya hiperbolü nokta nokta çizmek;...ve daha pek çoğu. Ne yazık ki herhangi bir açıyı üç eşit parçaya bölmek bunlar arasında yer almıyor. Siz belki gerçek cetvel ve gerçek pergelinizi ustaca kullanarak bunu herkesçe (tabii matematikçiler dışında) kabul görecek düzeyde başarabilirsiniz. Ama ispat edemezsiniz. İşte matematikle uygulama arasındaki fark bu kadar ince, ve yine de kabul edilmeyecek kadar büyük.



Şekil 3

İdeal kâğıt âdi kâğıda karşı.
(a) Uzun bir kâğıt şerit boylamasına burulacak şekilde zorlanıyor.
(b) Burulma olursa sonuç bir sarmaldır (helis) ve kâğıt gerçek kâğıttır.
(c) Burulma olmuyorsa (veya kâğıt kırıldıysa) ideal kâğıttır.
Büyük bir küreyi gerçek kâğıt parçalarıyla kırışıklık yaratmadan kaplayabilirsiniz, ama ideal kâğıtla bu imkânsız.

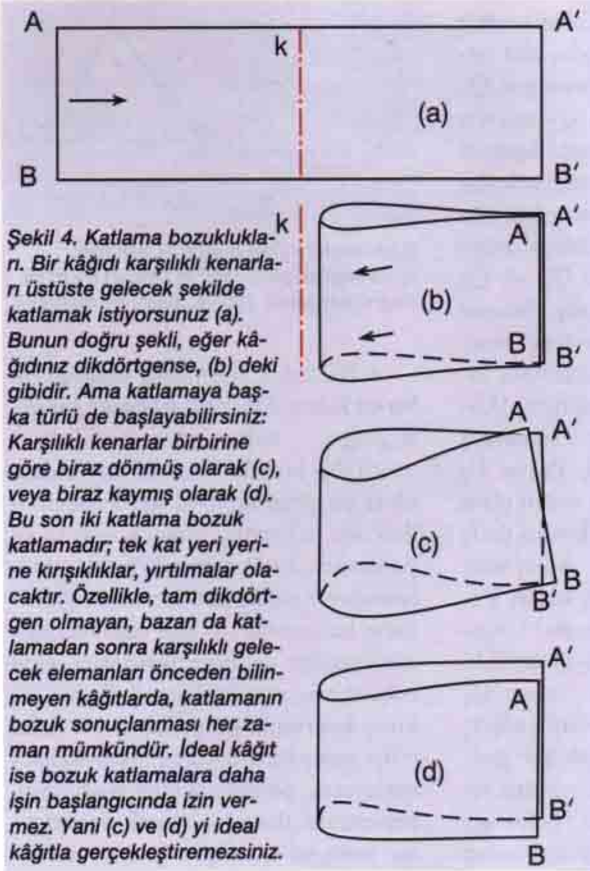
Gerçekte kullanılan cetvel ve pergel birbirinden çok farklı âletler gibi görünse de, ideal cetvelle ideal pergel arasındaki fark aslında çok önemsiz. Pergeli, cetvel üzerinde nokta belirlemekten kaçınmak için kullanırız. Pergelin iki ucu arasında belirlenen sabit uzaklığı, cetvelin kenarı üzerinde işaret edeceğimiz iki nokta arasına taşıdığımızı düşünürsek (bunun tersini de yapabiliriz), cetveli pergel gibi kullanabilmek için yapacağımız tek şey, bu işaretlediğimiz noktalardan birini kâğıt üzerinde belirlenen bir noktaya sürekli çakışmış olarak tutarken öteki noktanın alabileceği her konumu, cetveli döndürerek belirlemek olurdu. Burada açıkça söylenmeyen varsayım, ideal cetvelin (veya açıklığı belirlenmiş pergelin) ideal katı cisim gibi davrandığı; yani şeklini, boyutlarını hiç değiştirmediği.

İdeal Kâğıt Çok İnatçıdır

Hepimizin çok iyi bildiği gerçek kâğıtlar, kendilerinde bulunduğunu sandığımız, ya da onlara yakıştırdığımız özellikleri her zaman çok iyi gösteremez. Islanmadıkça, aşırı zorlanmadıkça farkına varılmasa da, katlanırken boyutlarını az veya çok değiştirebilirler. Katlamalar ve diğer işlemler sonunda elde etmeyi beklediğimiz matematiksel sonuçlar ancak ideal bir kâğıtla elde edilebilirdi. O halde, ideal kâğıdı tanımlamak gerekiyor. Bunun için ideal kâğıdın aşağıdaki özelliklerini bilmek yeter:

- Kalınlığı yoktur (sıfırdır).
- Hiç direnç göstermeden kıvrılabilir, bükülebilir, katlanabilir.
- Üzerine çizilebilen bütün doğru ve eğri çizgilerin uzunlukları değişmez; dolayısıyle, bunların oluşturabileceği açıların, alanların değeri kıvrılma veya katlama ile değişmez.
- Bütün noktaları bir düzlem üzerine çakıştırılabilir.

Bu özellikleri sâyesinde, bir ideal, düzlem kâğıt istenildiği gibi eğilip, bükülüp, katlanıp, buruşturulduktan sonra, tekrar açılarak düzlem hâline getirilebilir; bu işlemler sonucunda, üzerinde bulunan çizgi, şekil ve açılar



Şekil 4. Katlama bozuklukları. Bir kâğıdı karşılıklı kenarları üstüste gelecek şekilde katlamak istiyorsunuz (a). Bunun doğru şekli, eğer kâğıdınız dikdörtgense, (b) deki gibidir. Ama katlamaya başka türlü de başlayabilirsiniz: Karşılıklı kenarlar birbirine göre biraz dönmüş olarak (c), veya biraz kaymış olarak (d). Bu son iki katlama bozuk katlamadır; tek kat yeri yerine kırışıklıklar, yırtılmalar olacaktır. Özellikle, tam dikdörtgen olmayan, bazan da katlamadan sonra karşılıklı gelecek elemanları önceden bilinmeyen kâğıtlarda, katlamanın bozuk sonuçlanması her zaman mümkündür. İdeal kâğıt ise bozuk katlamalara daha işin başlangıcında izin vermez. Yani (c) ve (d) yi ideal kâğıtla gerçekleştiremezsiniz.

da hiçbir değişiklik olmaz. Bu bakımdan, ideal kâğıda iki boyutlu ideal katı cisim gözüyle bakabilirsiniz. Halbuki, gerçek kâğıdı katlayıp, kat yeri belirginleşsin diye parmağınız ve tırnağınız arasında sıyırmışsanız, açtığınızda artık eski, düzlem hâline gelmediğini görürsünüz. Kat izi boyunca kâğıt uzamıştır. İdeal kâğıtta bu olmaz.

Gerçek kâğıttan ince, uzun bir şeridi iki ucundan tutarak burabilir, burgu şekli verebilirsiniz. İdeal kâğıtta bu da mümkün değil! Niçin mi? Burulmadan önce, şeridin iki paralel uzun kenarı ile bunların arasındaki orta ekseni tam tamına eşit uzunluktadır. Burulunca iki kenar, tıpkı çift DNA sarmalı gibi, helis hâline gelirken orta eksen doğru olarak kalır. Ama bunun için kenarların uzaması, bu uzama sonucu oluşan iç kuvvetleri dengelemek üzere de, eksenin kısalması gerekir. Yalnız kâğıt değil, çelik, hattâ ondan daha da katı olan elmastan yapılmış bir şerit bile burulmaya karşı koyamazken, ideal kâğıt bunu yapmanıza inatla direnir, çünkü doğasına aykırıdır. Çok rijit bir boruyu buramadığınız gibi onu da buramazsınız. Ama öte yandan, her türlü eğmeye, bükmeye, ve tabii katlamaya da hiç direnç göstermez; yeter ki, üzerine çizildiğini düşünebileceğiniz, doğru ya da eğri bütün çizgilerin uzunlukları değişmek zorunda kalmasın. Buna gerek var; aksi hâlde katlamadan sonraki uzunlukları öncekilerle nasıl karşılaştırır, nasıl matematik kesinlikte ispatlar yapabilirdik?

Nasıl Katlamalı?

Önce gerçek bir kâğıdı nasıl katladığımızı hatırlayalım. Gerçek kâğıtla, hemen hiçbir zaman farkına dahi varmadığımız bir kolaylıkla başardığımız pek çok katlamada bu kolaylığı nelere borçlu olduğumuzu hiç düşündünüz mü? Söyleyelim; iki şey çok önemli:

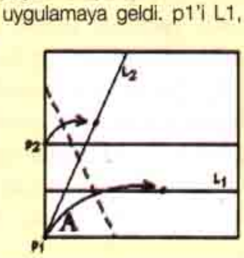
1. Çoğu zaman kâğıdımız açılmış durumdayken dikdörtgen veya karedir. Katlarken ilk adım olarak mevcut kenarları, köşeleri veya buna benzer

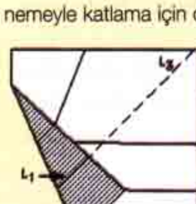
Açı Nasıl Üçe Bölünür?

İşte böyle... 1970'lerde Hisashi Abe'in geliştirdiği bu yöntemle:

1. Üçe böleceğimiz açı, kâğıdımızın alt sol köşesinde bulunsun. Bu açıya A diyelim. (Unutmayalım ki, burada A'nın bir dar açı olduğunu varsayıyoruz, fakat bu yöntemi geniş açılara uyarlamak da son derece kolaydır.) Şimdi de alt kısımda, birbirine paralel ve eşit uzaklıkta katlama çizgileri oluşturalım.

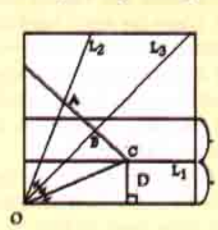
2. Sıra (O6)'yı uygulamaya geldi. p1'i L1, p2'yi L2 üzerine katlayalım. Bunu yapmak kolay olmayabilir! (Daha doğrusu öyleymiş, çünkü denemeye cesaret dahi etmiyorum.) Belki birkaç denemeyle katlama için doğru yer belirlenebilir.



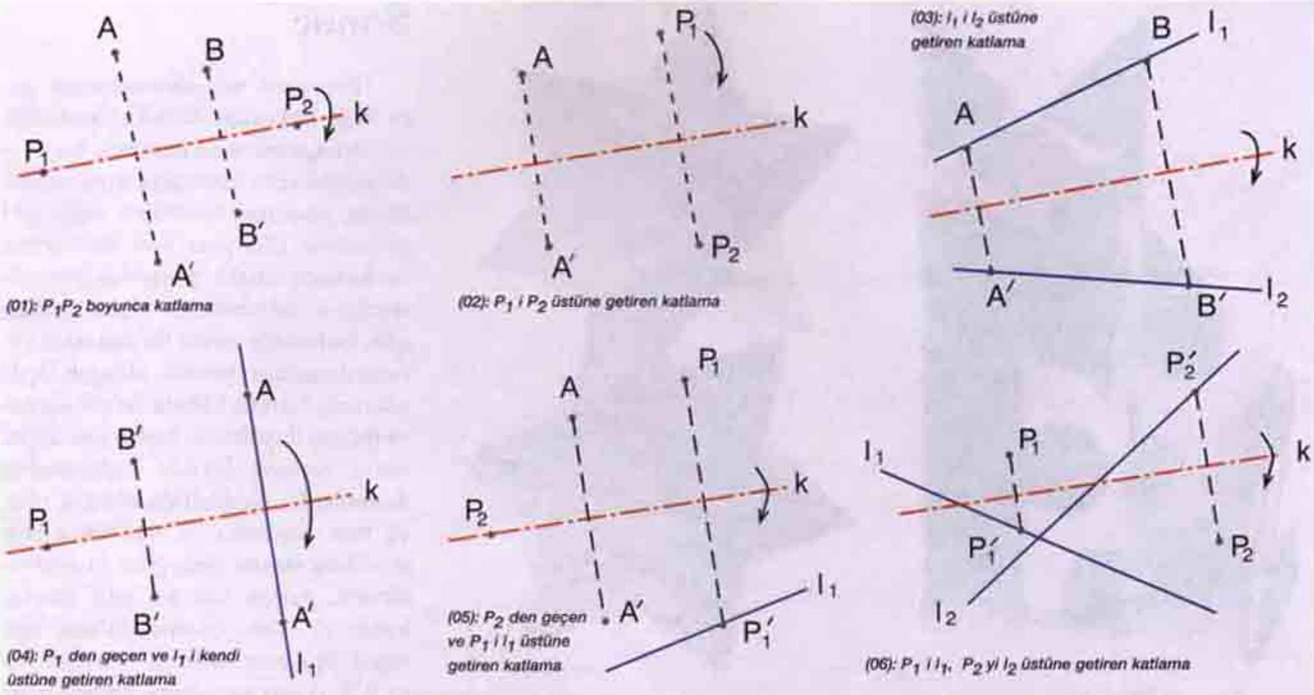


3. L1 doğrusunun katlanmış kısımda kalan (yani kâğıdın arka yüzünde) kısmını uzatalım ve elde ettiğimiz yeni çizgiye L3 diyelim. Şimdi ikinci adımda yaptığımız katlamayı açalım ve L3'ü alt sol köşeye uzatalım. Dikkat edin, çünkü uzattığınız çizginin tam köşe noktasını bulması gerekli. Sürpriz! L3 çizgisi, şu anda tam olarak A açısını veriyor.

İyi ama, neden? Bu soruyu yine şekil üzerinde yanıtlamak da yarar var. Görüldüğü gibi, şeklimize birkaç çizgi daha eklendiğinde, artık AOB, BOC, COD üçgenlerinin benzer üçgenler olduğunu görmek oldukça kolay hale geliyor. Böylelikle AOB, BOC ve COD açıları birbirine eşit olduğundan, elimizde A/3 açısı kalıyor.



H. N. Özsöylev
Bilim ve Teknik Dergisi Mart 1998



Şekil 5. Huzita'nın altı Origami Aksiyomu. P_1, P_2 verilen noktalar, l_1, l_2 verilen doğrular; A, B gelişigüzel seçilmiş noktalar; k katlama ekseni; P_1', P_2', A', B' katlamadan sonra P_1, P_2, A ve B nin üstüne gelecekleri eşlenik noktalar. İlk beş aksiyomu pratikte gerçekleştirmek için gerekli olabilecek ek noktalar P_1', P_2', A', B' ve katlama ekseni k, cetvel-pergel yardımıyla kolayca elde edilebilir. (O6) ise, bir ideal kâğıt bükülerek P_1 noktası l_1 üzerinde kaydırılırken, l_2 doğrusunun P_2 ile çakıştığı durumda katlama tamamlanır. İdeal kâğıtla, ilk beş aksiyom olan (O1)-(O5) de daha kolay gerçekleştirilebilirdi.

"görünen" bazı elemanları üstüste getirmeye çalışırız ki bu kolaydır.

2. Daha sonra, asıl "katlama"yı gerçekleştirirken, çoğunlukla farkında bile olmadan, kâğıdın üstüste dokundurduğumuz iki katının birbiri üstünde biraz kayarak, biraz dönerek, katlamanın son durumunda alacakları konumlara kendilerini ayarlamalarına izin veririz. Yani başlangıçta olabilecek küçük hataların kabul edilebilir bir düzeye inmesine yardımcı oluruz.

Ne demek istenildiğini aşağıdaki deneyleri yaparak daha kolay anlayabilirsiniz. Önce gelişigüzel kesilmiş âdi kâğıtla şöyle bir katlama gerçekleştirin: Kâğıdın üzerine gelişigüzel iki nokta işaretleyin ve sonra bu iki noktayı üstüste getirerek katlamayı tamamlayın. Deneyi birkaç kez tekrarlayarak, katlama sırasında ne yaptığınıza, ne gibi kolaylıklar sağladığınıza, ve sonunda ne kadar başarılı olduğunuza çok iyi dikkat edin. Özellikle, iki noktayı üstüste getirmenin kolay olduğunu, ama bunu yaparken üstteki kâğıdın alttakine göre bazan biraz sola, bazan biraz sağa dönmüş olabildiğini farketmişsinizdir. Böyle olunca da, iki noktayı üstüste getirdikten sonra kâğıdın üst ve alt katlarının birbirine göre dönmesine izin vermeden, katlama işlemini katlama çizgisine kadar sürdürürseniz, kırışıklıkların ve düzlemden sapmaların meydana gelmesini önleyemezsiniz.

İkinci deney bu sonuçları çok daha çarpıcı şekilde ortaya koyar. Yukarıdaki deneyi, kâğıt yerine, paket yapmada kullanılan geniş yapışkan bandlardan keseceğiniz bir parça ile tekrarlayın. Ama bu sefer katlarken yapışkan yüzler birbirine değecek Artık yukarıda sözünü ettiğimiz ikinci kolaylıktan isteseniz de yararlanamazsınız. Noktaları karşı karşıya getirip daha ilk teması yapar yapmaz, bundan geri dönmeniz, veya kaydırarak, döndürerek ayarlamanız artık mümkün değildir. Doğru-dürüst, kabul edilebilir bir katlama yapabildiyseniz, ya çok yetenekli ya da çok şanslı olmalısınız. Denemelerin büyük çoğunluğunda, tek, ideal katlama ekseni yerine, az veya çok sayıda kırışıklıklar, katlar oluştuğunu görürsünüz.

Gerçek kâğıdı katlarken yararlanabildiğiniz bu kolaylık, yani döndürerek ayarlama, aslında gerçek kâğıdın sahip olduğu uzayabilme, kıvrılabilme gibi özelliklerin sağladığı bir imkân. İlk bakışta bu bir avantaj gibi görünse de, altında yatan belirsizlik yüzünden katlamanızı da matematiksel bakımdan belirsiz yapıyor. Yani gerçek kâğıtla, sâdece iki noktayı bir defada üstüste getirerek, tek katlama çizgisi olan, ideal bir katlama yapamazsınız; denemeniz gerek. Deneme ise matematikte geçersiz. Ama ideal katlamayı yine de çeşitli yollarla gerçekleştirebilirsiniz. Üstüste gelmesi istenen iki noktayı birleştiren doğruyu çizdikten sonra, noktaları çakıştırırken bu doğrunun iki yarısını da birbiri üzerine çakıştırarak; veya noktaları birleştiren doğrunun orta dikmesinin katlama çizgisi olduğunu hatırlayıp bunu kullanarak; veya üstüste gelecek başka bir nokta çifti daha elde edip öteki çiftle birlikte onu da çakıştırarak...

Bütün bu yolların aslında birbirine denk olduğu, çakışacak iki nokta verildikten sonra, hem katlama ekseninin, hem de çakışması gereken başka eleman çiftlerinin (nokta veya çizgi) C-P ile kolaylıkla elde edilebilmesinden anlaşılabilir. Böyle iki çift eleman bulunduktan sonra, bunlar çakıştırılarak tamamlanan bir katlama ideal katlamadır; yani ideal kâğıtla mümkün olabilecek yegâne, doğru katlama.

Huzita'nın ilk beş aksiyomu gerçek kâğıt ve C-P kullanarak açıklanan katlama yöntemi ile gerçekleştirilebilir: Üstüste çakışacak farklı iki çift

nokta (veya geometrik eleman) elde ederek. Gördüğünüz şekillerde her aksiyom için P_1, P_2 verilmiş noktaları; l_1, l_2 verilmiş doğruları; A, B,... gelişigüzel seçilmiş noktaları ve A′, B′,... onların çakışacağı eşlenik noktaları; k ise katlama eksenini göstermektedir. Ama (O6) aksiyomu için, yani katlamada ayrı ayrı iki noktanın herbirinin ayrı iki doğru üzerine gelmesi için, A, A′ ve B, B′ gibi eşlenik noktalar artık C-P ile bulunamaz.

Son Ümit: İdeal Kâğıt

Şimdi son bir ümidimiz kaldı (O6) yı kurtarmak için: İdeal kâğıt. Acaba ideal kâğıt kullanıyor olsaydık, onu katlamak için de yine birbiriyle çakışacak iki ayrı nokta çifti mi bulmamız gerekecekti? Yoksa, meselâ sâdece bir çift noktanın üstüste getirilmesi yetecek, bunu yapınca diğer bütün eşlenik noktalar, katlama işlemi ilerledikçe, otomatik olarak üstüste geliverecek miydi? İdeal kâğıdın, şerit halindeyken burulmaya karşı gösterdiği sonsuz direnç gibi, katlarken de başlangıçta iki noktasının üstüste getirilmesi, bir ve ancak bir şekilde, yani ideal katlamaya götürecek şekilde gerçekleşebilir olamaz mıydı? Eğer öyle ise bu, ideal kâğıdın gerçek kâğıda üstünlüğünü gösterir: İdeal kâğıdın iki noktasını ancak ve ancak tek bir şekilde, yani ideal katlamada eşlenik olacak şekilde, üstüste getirebilirsiniz ki, bu da kesinlikle sizi doğru sonuca götürecek bir işlemdir. Bu üstünlük, aynı zamanda ideal kâğıt katlamanın C-P işlemlerine de üstün olduğu anlamına gelir. (O1)-(O5) aksiyomları bile çok daha zahmetsizce, birer eleman çakıştırmakla elde edilebilir. Ve artık (O6) ideal kâğıtla ve sonlu sayıda operasyonla şöyle gerçekleştirilebilir:

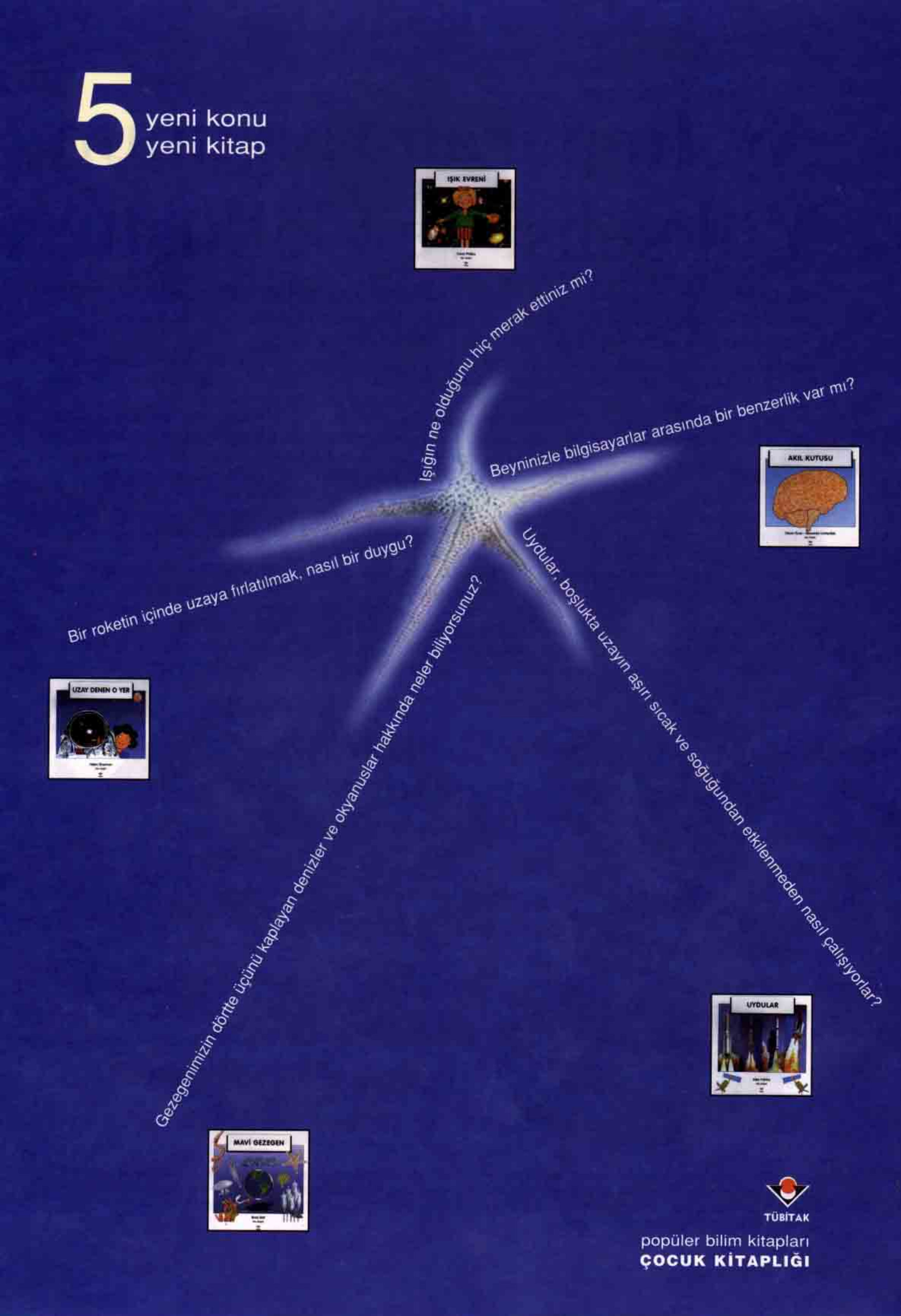
- P_1 noktası l_1 üzerinde herhangi bir Q_1 noktasına getirilir. Bu sırada P_2 de kâğıdın başka bir Q_2 noktasına dokunmaktadır.
- P_1 noktası l_1 üzerinde kaydırılırken Q_2 izlenir ve onun l_2 ile çakıştığı andaki konumu sabit tutularak katlama tamamlanır.

Gerçek kâğıtla bunu yapamazdınız, çünkü P_1 ile l_1 çakıştırılırken , kâğıt değişik yönler alabilirdi. İdeal kâğıtta bu ancak tek bir yönde, doğru olan yönde, mümkün.

Sonuç

Huzita'nın son aksiyomunun geçerliliği, kullanılan kâğıdın ideal kâğıt olmasına, yani onun herhangi bir yönde uzama veya kısalmaya karşı sonsuz direnç gösterme özelliğine bağlı gibi görünüyor (aksiyom ileri sürülürken bu konuda titizlik gösterilip gösterilmediğini bilmiyoruz). Tabii bunun için, katlamada yalnız iki noktanın çakıştırılmasının yeterli olduğu ispat edilmeli. Gerçek kâğıtta iki çift noktaya ihtiyaç duyulması, katlamaya doğru sonuç verecek şekilde başlanmadığı durumlarda, sapıklığı düzeltecek yönde bazı kaydırma ve döndürmelerin mümkün olması gerçeğine dayanıyor. Meselâ, gerçek kâğıdı , bazı sınırlar içinde de olsa, üzerine çizilmiş eşit uzunlukta, ama simetrik olmayan AB ve A′B′ doğru parçalarını üstüste getirecek şekilde bükebilirsiniz, ama bu sizi ideal katlamaya götürmez; bunun için doğru parçalarının simetrik olması gerekir, ve simetri ekseni aynı zamanda katlama eksenidir. O halde problem şu teoremin ispatına indirgenmiş görünüyor: İdeal kâğıt üzerindeki eşit uzunlukta olan fakat, düzleme açındırıldığında simetrik olmayan iki doğru parçası üstüste çakıştırılamaz. Veya: İdeal kâğıdın bükülerek üstüste getirilmiş iki parçası, birbirine göre döndürülemez. Teoremi ispat etmek üzere bir yaklaşım, bunun aksinin yapılabilmesi için, ideal kâğıt özelliklerinin dışına çıkılması gerektiğini (meselâ çizgi uzunluklarının veya açıların değişmesi, ya da ideal kâğıdın burulması) göstermek olabilirdi. Denemek ister misiniz?

Suha Selamoğlu


5 yeni konu
yeni kitap
IŞIK EVRENİ
Işığın ne olduğunu hiç merak ettiniz mi?
Beyninizle bilgisayarlar arasında bir benzerlik var mı?
AKIL KUTUSU
Bir roketin içinde uzaya fırlatılmak, nasıl bir duygu?
Uydular, boşlukta uzayın aşırı sıcak ve soğuğundan etkilenmeden nasıl çalışıyorlar?
UZAY DENEN O YER
Gezegenimizin dörtte üçünü kaplayan denizler ve okyanuslar hakkında neler biliyorsunuz?
UYDULAR
MAVİ GEZEGEN
TÜBİTAK
popüler bilim kitapları
ÇOCUK KİTAPLIĞI

Ay İmparatorluğunun Yükselişi ve Çöküşü

Jules Verne'in Aya Yolculuk adlı ünlü kitabını herhalde okumuşsunuzdur. Üç arkadaş uzun namlulu bir topla kendilerini Ay'a attırırlar. Ian Stewart bu serüveni matematikle sürdürüyor. Ayrıca matematik yardımıyla haritalandırmanın eğlenceli bir yanı da var.

Binbaşı Elphinstone, arkadaşı J.T. Maston ana teleskopun okülerinden (göz parçası) gökyüzünü izlerken, Baltimore Gözlemevi'nin kubbesi altında bir ileri gidiyordu, bir geri. Maston gergin bir sesle "Onları göremedim." dedi.

Elphinstone sordu: "Bakabilir miyim?"

"Elbette" dedi Maston matematik formülleriyle dolu kalın bir defteri alırken. "Eğer pamuk barutu miktarını hesaplarken % 1 yanlışlık yapmışlarsa Ay'a varmaları saatlerce gecikebilir. Sanırım Barbicane, Nicholl ve Ardan'ın başına bir felaket geldiğini düşünmek için henüz çok erken."

"Haklısın" diye içini çekti Elphinstone "insan hep olumlu düşünmeli." Binbaşı birden titreyerek şöyle dedi: "Bu Long Tepesi, şeytanın ini gibi soğuk. Bence şimdi ana binaya gidip bir saat ısınalım. Sonra gözlemevine döner, araştırmamızı sürdürürüz."

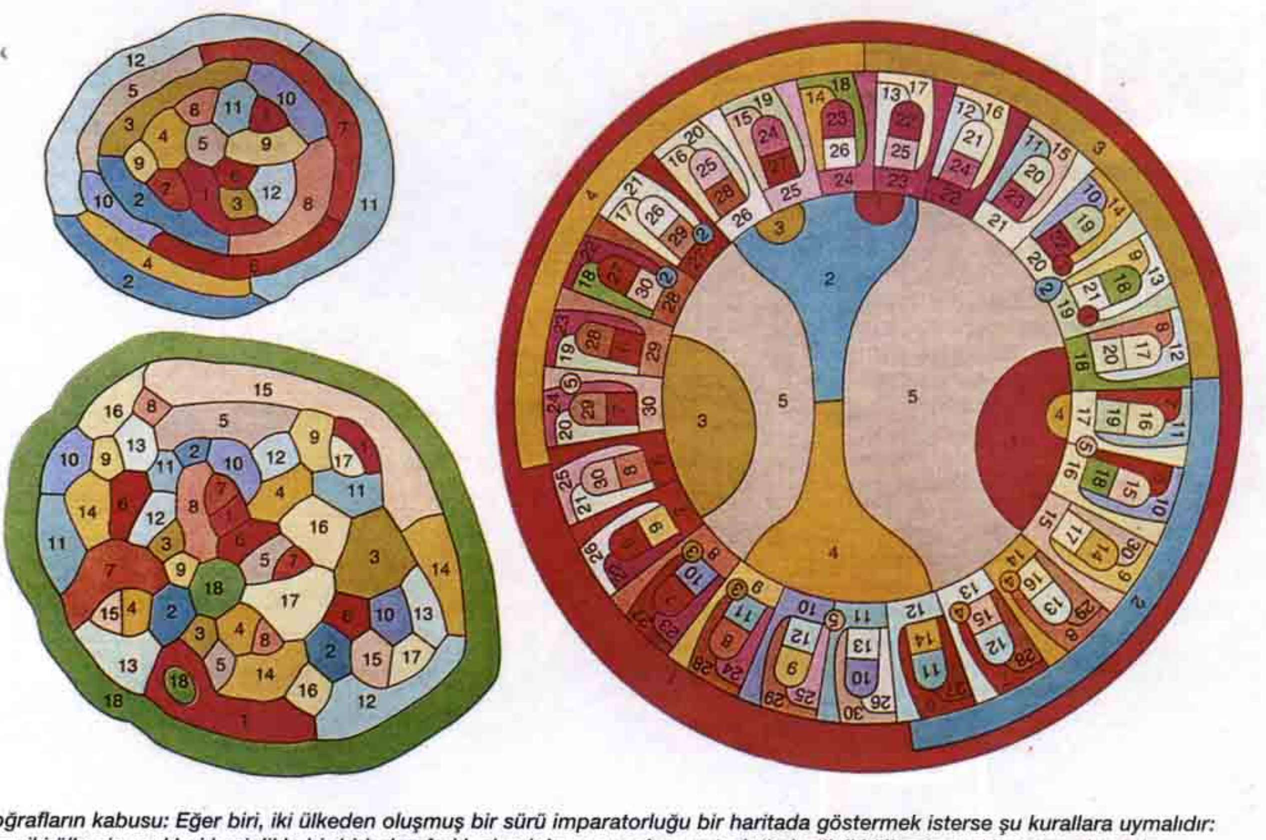
Maston "Şu haber telgrafının şeridinden bakalım ne haberler çıkacak? Çok merak ediyorum" dedi. İki arkadaş kubbenin köşesine taktıkları küçük makineye baktılar.

"Bütün haberler nasıl olsa şerite yazılacak Maston. Dönüşte bakarız."

Maston istemeye istemeye boyun eğdi. İki adam hızlı adımlarla ana binanın sıcacık lobisine girdiler ve bir garson çağırıp kahve ve sandviç ısmarladılar.

Binbaşı duvarda bir Dünya haritası görerek durakladı. Bu haritada Almanya turuncu, Fransa yeşil, Amerika mor ve Britanya İmpatorluğu pembe renkteydi.

Elphstone gururla şöyle dedi: "Yakında bu haritayı yeniden çizeceğiz." "Anlamadım." dedi Maston. "Bu haritanın yanına bir de Ay haritası koyacağız; o da mor renkli olacak. Çünkü Ay, Amerika'nın bir kolonisi olacak. 'Britanya İmparatorluğu üzerinde Güneş hiç batmaz' denir; fakat Amerika'nın Ay kolonisi



Kartoğrafların kabusu: Eğer biri, iki ülkeden oluşmuş bir sürü imparatorluğu bir haritada göstermek isterse şu kurallara uymalıdır: Komşu iki ülkenin renkleri kesinlikle bir birinden farklı olmalıdır ve aynı imparatorluğa bağlı iki ülkenin renkleri aynı olmalıdır. Resimdeki haritada 12 renk vardır; ama bu durum yalnızca iki ülkesi olan imparatorlukların haritaları için geçerlidir. Üç ülkesi olan imparatorluklar için gerekli renk sayısı 18'dir.

dünyadaki bütün ülkelerin üstünde yükselecek."

Bir imparatorluk kurma düşüncesi aklından geçmeyen Maston "Öyle mi, biraz da yeşil gerekecek" dedi. "Nasıl? Anlayamadım." Özür diler gibi açıkladı Maston: "Unutmayın ki Ay'a gidenlerden Ardan Fransız." Sonra konuyu değiştirmek için haritayı inceledi: "Haritacılar niçin o kadar çok renk kullanıyor, doğrusu şaşıyorum. En az 12 renk olmalı." "Eee, ne olmuş?" "Harvard'ta okuyan matematikçi akrabam, Percival Heawood, bana küre üzerine çizilen harita boyamalarında aynı sınırı paylaşan komşu iki ülkeyi farklı renklerde göstermek üzere, 5 rengin yeteceğini söylemişti. Yanılmıyorsam problemi ilk kez 1852'de İngiliz Francis Guthrie ortaya atmış."

[Editörden: 1879'da Londra Matematik Derneği üyesi avukat Arhtur Kempe 4 rengin daima yeteceğinin kanıtını sundu; fakat 11 yıl sonra Heawood bu ispatta bir hata buldu.

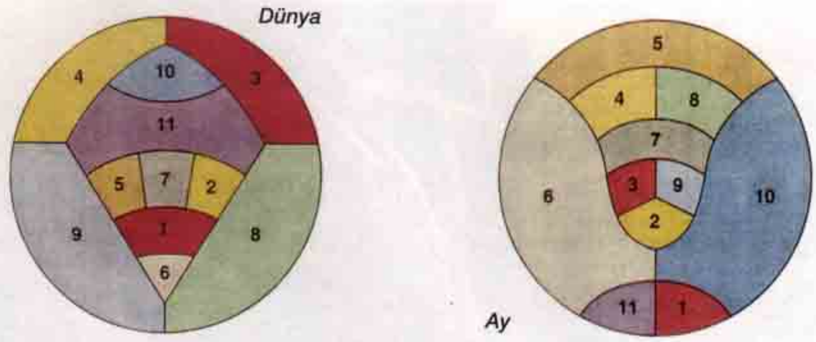
100 yıl kadar hiç kimse bir haritayı, komşu ülkeler aynı renklerde olmamak üzere, boyamaya 4 rengin yetip yetmeyeceği bilemedi. Nihayet 1976'da Illinois Üniversitesinden Kenneth Appel ve Wolfgang Haken, önemli ölçüde bilgisayar yardımıyla, harita boyamak için asla 5 rengin gerekmediğini kanıtladı.]

Elphinstone bir an düşündü: "Fakat neden tek bir renk yetmesin?" "Efendim? Ha, söylemeyi unuttum. Komşu ülkeler aynı renkten olmayacak."

"Anladım" dedi Binbaşı. "Peki, bir böreğin dilimleri gibi, tepeleri merkezde birbirine komşu daire dilimi biçiminde 8 ülke olursa ne olacak?"

Maston şöyle yanıtladı: "Komşuluktan ne anladığımızı tanımlamamazı gerekir. İki ülke, uzunluğu sıfır olmayan bir sınır paylaştığı zaman komşudur. Şimdi bakıyorum da bu harita gerektiğinden çok fazla renk içeriyor. Sanırım ki komşuluk dışında bazı koşullar uygulandı."

Elphinstone kahvesini bitirip bir brendi ısmarlamıştı ki Maston heyecanla fırlayıp ayağa kalktı: "Harita boyama probleminin genişletilmiş bir şeklini hatırladım. Varsayalım ki haritada ülkeler yerine imparatorluklar var. Aynı imparatorluğa ait ülkeler aynı renkten olmalı. Farklı imparatorluklarda da aynı renkler kullanılabilir; fakat kural eskisi gibi şudur: iki ülke komşuysa farklı renklerde olmalıdır."



Her imparatorluğun, Dünya'da ve Ay'da birer tane bulunmak üzere iki ülkeden oluştuğunu varsayarsak bir harita oluşturmak için en çok kaç renk gerekmektedir? Resimde gösterilen haritada 9 renk bulunmaktadır; fakat kimse, 10, 11, hatta 12 rengin kullanıldığı haritaların olup olmadığını bilmemektedir.

"Bu çok mantıklı."

"Evet, öyle. Doğal olarak, küre üzerinde iki imparatorluk komşuysa farklı renklerde olmalı. İki ülke içeren bir imparatorluğa 2-imp, üç ülke içerene 3-imp vb diyelim. m ülke içeren bir imparatorluk m-imp olacaktır. 1890'da Heawood 2-imp'lerden oluşan bir haritayı boyamak için en çok 12 rengin gerektiğini kanıtladı. Şekil 1'de sol üstte, her biri 2 ülke içeren 12 imparatorluğun 12 renkle boyanabildiğini görüyorsunuz. Heawood daha ileri giderek şunu da kanıtladı: m-imp'lerden oluşmuş bir haritayı boyamak için 6 m renk gerekli ve yeterlidir.

[Editör'den: Heawood daima 6m sayıda m-imp'ler içeren bir harita olması gerektiğini tahmin etti. Bu tahmin 1984'te San Jose Eyalet Üniversitesinden Brad Jackson ve Santa Cruz'daki Kaliforniya Üniversitesi'nden Gerhard Ringel, Heawood'un bu tahminini kanıtladılar. Güney Kaliforniya Üniversitesi'nden Herbert-Taylor, şekil 1'de görüldüğü üzere 18 adet 3-imp ve 30 adet 5-imp içeren haritalar çizdi.]

Binbaşı ikinci bir brendi getirtti ve sordu: "m-imp'lerden bir bölümünün Ay üzerinde olması halinde de, bu kurallar mı geçerli olacak?"

Maston bir an düşündü ve "Herhalde" dedi "bu durumda bir yerine iki küre üzerindeki haritaları düşüneceğiz. En basit örnek şudur: Dünya üzerindeki ülkelerden her biri bir 2-imp'in 1. ülkesidir; bu 2-imp'in 2. ülkesi Ay üzerindedir (şekil 2). Bu durumda Heawoood'unkine benzer bir yöntemle gerekli renk sayısının 8 ile 12 arasında olduğu kanıtlanabilir."

[Editör'den, Berlin'deki Humbolt Üniversitesi'nden Rolf Sulanke gösterdi ki, bu gibi haritalardan bazıları 9 renk gerektirir; fakat doğru yanıtın 9, 10, 11 ve 12'den hangisi olduğu bilinmemektedir. Okur 3-imp'ler düşünebilir; her 3-imp'in bir ülkesi Dünya'da, bir ülkesi Ay'da, bir ülkesi de Mars'tadır. Üç küre için en uygun renk sayısı 16, 17 ya da 19'dur. m>4 ise renk sayısı şunlardan biridir: 6m, 6m-1, 6m-2.]

Elphistone ve Maston gözlemevine döndüler.

Haber şeridinde hâlâ bir haber yoktu. Maston gözünü tekrar teleskobun okülerine dayadı. "Bir şey var mı?" dedi Elphinstone. "Hayır, henüz yok. A, bir dakika, işte orada." "Bakabilir miyim?." Binbaşı Ay'ın üzerinde çok küçük, belli belirsiz bir nokta gördü. "Ah, nihayet başardılar demek ki. Yakında mor renkli bir Ay haritamız olacak." "Biraz da yeşil içeren" diye ekledi Maston. "Tabii, tabii. Fakat o ne? Sanırım birçok uzay gemisi görüyorum."

Haber şeridi makinesi tıkırdamaya başladı. Maston koşup haberi okudu: "Anakaralararası Haber Ajansı bildirir ki, bugün Arjantin, Belçika, Brezilya, İngiltere, Çin, Almanya, Hollanda, Japonya, Portekiz, İspanya, Rusya ve Amerika Birleşik Devletleri Ay'a insanlı füze fırlattılar."

Binbaşı Maston'a bakakaldı. "Sanırım mor, yeşil ve 7-10 renk daha söylüyordun sen?"

Scientific American, Nisan 1993
Çeviri: Selçuk Alsan