MATEMANYA

O kadar da Değil!

Matematiği neden sevdiğimi hiç anlatmış mıydım sizlere?
Yani hani, ben renklerden narçiçeğini, çiçeklerden gülü, hayvanlardan kediyi, mevsimlerden baharı, bilimlerden de Matematiği severim der gibi:
Matematik güzel huyludur da ondan. Asla beklenmedik davranışlara girmez.
Daha önce de yazmıştım: Siz hiç "ben 20'den büyük olmak istiyorum" diyen 7 ile karşılaştınız mı? Ya da "ben de asal sayı olmak istiyorum" diyen bir çift sayı?
Diğer kurallar da böyle. Herkes yerli yerinde, kendi iç ilişkileri, akrabalıkları, dostlukları ile yaşayıp giderler.

Sürpriz, şaşırtma yok.

Huysuzluk yok.

Zaman zaman, şaşkınlık yaratan "numaralar"la karşılaşmıyor değiliz gerçi: Örneğin "aklından bir sayı tut" diyerek başlayan sözde "sihirbazlıklar"ı düşünün. İşin gerisini anlayınca, "oh be ferahladım" deyip matematiği daha da seviyor insan. Bakın şuna:

"Aklından bir sayı tut, şimdi 3 ekle, 5'le çarp, son sayıdan 15 çıkar, elde ettiğinin 2 katını al, sondaki sıfırı at, bulduğun sayıyı söyle, sana aferin diyeyim!"

Böyle istediğimiz kadar gidebiliriz. Bakın ne yapmışız: Aklımızdan tutuğumuz sayı x olsun. Yaptığımız işlemler sırasıyla şöyle:

$x \to x+3 \to 5x+15 \to 5x \to 10x \to x$

Yani gördüğünüz gibi x daima denetimimiz altında dolaşıp duruyor.

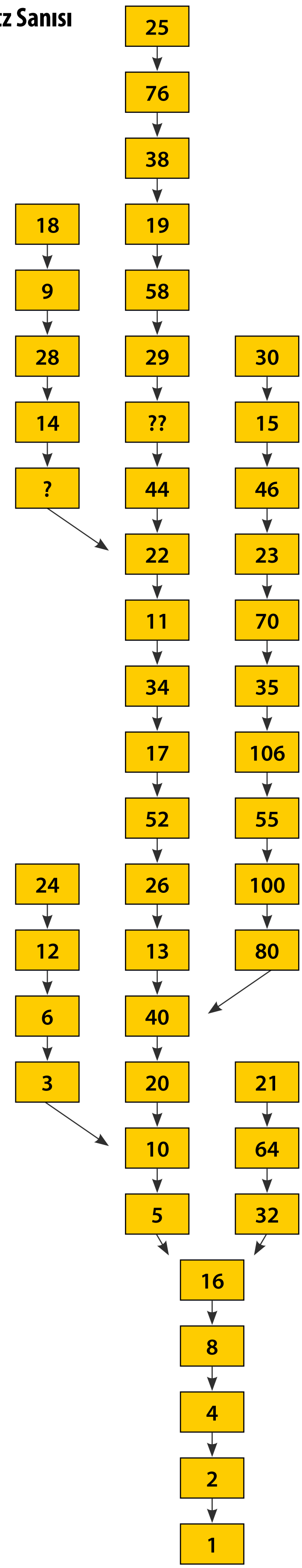
İşin aslının böyle olduğunu bildiğimizde bir sorun yok. Hatta dediğim gibi, sevimli ve keyifli.

Ve hatta sık sık bizi bunaltan başka bir gözbağcılık konusunu hatırlayalım:

$x = y$ olsun.
Eşitliğin iki tarafını da x ile çarpalım:
$x^2 = xy$;
iki taraftan y^2 çıkaralım:
$x^2-y^2 = xy-y^2$
Çarpanlara ayıralım:
$(x-y)(x+y) = y(x-y)$
Ve x-y ile sadeleştirelim:
$x+y = y$

Bu sonuç şaşırtıyor değil mi?
$x = y$ aldığımızdan:
$2y = y$, veya
$2 = 1$ sonucunu bulmuş oluruz.

Collatz Sanısı



Bu el çabukluğu marifet matematik, aslında x = y koşulumuzun x-y = 0 sonucunu doğurduğu, bu nedenle de x-y ile sadeleştirme işlemimizin sıfıra bölme olduğundan hatalı olduğu sonucuna varmamızı sağlar. Yani, gene bu gerçeği gördüğümüzde, yüzümüze bir gülümseme yayılır.

Şaşıracak bir şey, gözbağcılığa geçit yok!

Buraya kadar hem doğru hem de gönül yelpazeleyici. Ama öyle şeyler var ki, insan “bu da matematiğin muzipliği” deyip geçemiyor. Her şey güllük gülistanlık değil. Her ne kadar matematiği seviyoruz dedikse de, dikensiz gül bahçesi demedik. O kadar da değil yani.

Bakın şuna:
Her hangi bir doğal sayı ele alalım.
Buna X_0 diyelim. Eğer X_0 çift ise $X_0/2$'ye, tek ise $3X_0+1$ e gidelim.
Hadi bu yeni sayıya X_1 diyelim.
Böylece devam edelim:

$X_2 = X_1/2$ eğer X_1 çift ise
$= 3X_1+1$ eğer X_1 tek ise.

Bir örnek yapalım: $X_0=11$ olsun.
$X_1 = 34$
$X_2 = 17$
$X_3 = 52$
ve devam edelim:
52→26→13→40→20→10→5→16→8→4→2→1→4→2→1
görüldüğü gibi sonunda 4→2→1 döngüsüne girdi. Kaç adım attık acaba?
Yaptığımız her 2'ye bölme ya da 3 ile çarpıp 1 ekleme işlemini bir adım sayarsak, 11 sayısı 14 adım sonunda 1 sayısına indi.
Ondan sonra, daha önce uğramış olduğu 4 sayısına gittiği için, yolculuğun sonu kabul edip, 11 sayısının 14 adımda 1'e indiğini söylüyoruz.

Bir başka sayı alalım.
Dikkat edelim de 11 sayısının 1'e inerken geçtiği sayılardan birisi olmasın; çünkü öyle bir sayı seçilirse ne olacağını biliyoruz demektir. Örneğin, 11 sayısı 14 adımda 1'e inerken, 34, 13 adım; 17, 12 adım; 52, 11 adımda 1'e iniyor demektir. Bu sefer $X_0 = 15$ seçelim.
15 sayısının yolculuğuna bakalım:
15→46→23→70→35→106→53→160→80→40→ Buradan sonra devam etmemiz gerekmiyor. 11'in yolculuğunda da 40 sayısına uğramıştık. Oradan sonrası 8 adımda 1 sayısına inmiş. Önceden de 9 adım var; o halde 15 sayısı 40'a kadar 9 adım, toplam da ise 9+8= 17 adımda 1 saysına indi.
İlginç değil mi? İki sayı da aynı sona uğradılar. 11 en çok 52'ye yükselirken 15, 160'a kadar çıktı ama oradan sanki serbest düşüşe geçmiş gibi hızla 1'e çakıldı.
Bir başka örnek: $X_0 = 27$

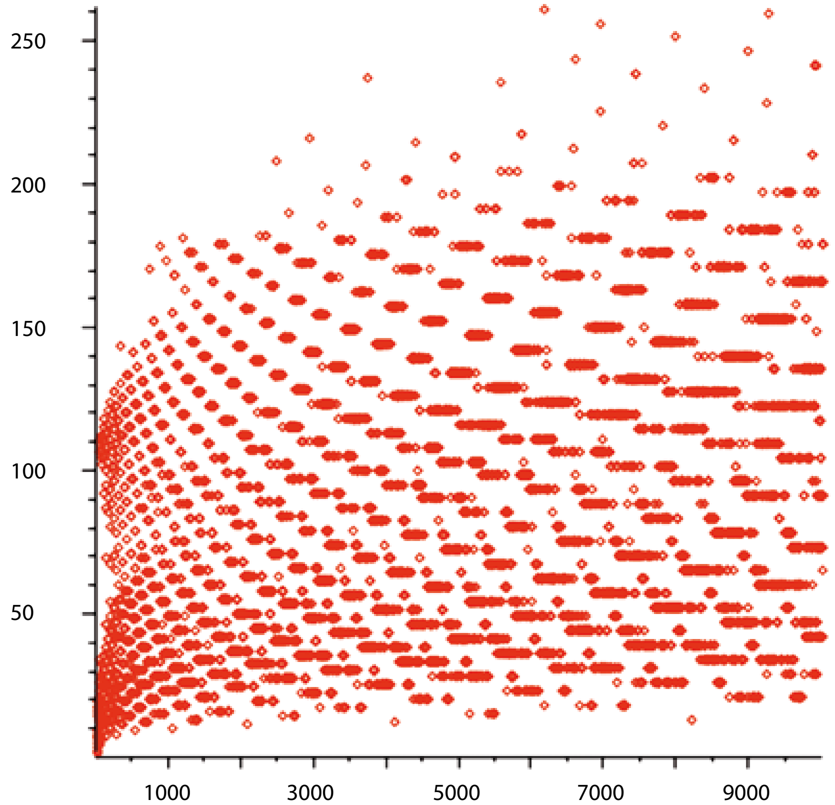
27, 82, 41, 124, 62, 31, 94, 47, 142, 71, 214, 107, 322, 161, 484, 242, 121, 364, 182, 91, 274, 137, 412, 206, 103, 310, 155, 466, 233, 700, 350, 175, 526, 263, 790, 395, 1186, 593, 1780, 890, 445, 1336, 668, 334, 167, 502, 251, 754, 377, 1132, 566, 283, 850, 425, 1276, 638, 319, 958, 479, 1438, 719, 2158, 1079, 3238, 1619, 4858, 2429, 7288, 3644, 1822, 911, 2734, 1367, 4102, 2051, 6154, 3077, **9232**, 4616, 2308, 1154, 577, 1732, 866, 433, 1300, 650, 325, 976, 488, 244, 122, 61, 184, 92, 46, 23, 70, 35, 106, 53, 160, 80, 40, 20, 10, 5, 16, 8, 4, 2, 1

Uzun uzadıya yazdım çünkü aslında başlangıç ne olursa olsun, dizinin öyle hemencecik 1'e indiğini düşünmeyesiniz diye. 27 sayısı en yüksek 9232 sayısına kadar yükseliyor.
Sonra sanki birden kendisini yüksekte tutan gizli el altından çekilivermiş gibi hızla aşağıya, 1 sayısına iniyor.
Toplam adım sayısı 112.

Bu tuhaf durum, yani herhangi bir başlangıç sayısından başlayarak çift ise yarısını almak, tek ise 3 katına bir ekleyerek ilerleme işleminde, hangi sayıyla başlarsak başlayalım, sonunda 1'e inmeyen bir sayıya rastlanmamış.

Collatz Sanısı ya da Collatz Kestirimi deniyor bu probleme.

Bu grafikte, 9999'a kadar olan başlangıç sayılarının (X_0), 1'e ininceye kadarki adım sayılarını görüyorsunuz.



Dikey eksende adım sayıları, yatay eksende ise X_0 'lar.

Zaman zaman, sayıların böyle yükselip yükselip, en yüksek noktadan hızla 1'e çakılması nedeniyle, bu sayılara "**dolu tanesi sayıları**" dendiği de oluyor. Her ne kadar henüz 1 sayısına inmemiş bir başlangıç sayısına rastlanmamış ise de, "**başlangıç sayısı ne olursa olsun, sonunda mutlaka 1 sayısına iner**" tarzındaki bir önermeyi maalesef kanıtlayabilmiş değil matematikçiler. $X_0 < 19.2x10^{58}$ sayısına kadar, başlangıç ne olursa olsun, sonlu bir adımdan sonra sayıların 1'e indikleri gösterildi. Ama bu ispat değil haliyle. $19.2x10^{58}$ sayısı her ne kadar yüksek görünse de, siz bakmayın; oradan sonsuza kadar "sonsuz" yol var; münasebetsiz bir sayının çıkıp 1'e inmeyi reddetmeyeceğini kim garanti edebilir.

Gerçi "münasebetsiz sayı" diye bir şey de olmaz ama!

İşte size ünlü **Collatz Sayıları**, ya da **Collatz Kestirimi**

Şimdi böyle rahat kaçıran, uyku bozan durumlar nedeniyle matematiğe olan sevgisi azalmaz insanın ama, taktımı da takar. Ben son nefesinde böyle keyif kaçıran çözülememiş problemlerle uğraşan matematikçiler bilirim.

Malum, matematiğe merakınız varsa bir gün mutlaka, sayılara kafayı takarsınız. Rakamlarla sayıları birbirinden ayırmayı öğrenince (seslerle harfleri ayırmak gibi) de, yani 500 işaretinin, ağzınızdan çıkan beşyüz sesinin kolay bir temsilinden ibaret olduğunu, bu sesin örneğin Roma rakamlarıyla 'C' işaretiyle de gösterilebileceğini anlayınca, iş biraz daha karışır. Ama rakamları, seslerin sembolleri olan harflerden ayırmanın, matematiğe kolaylık sağladığı için yaratıldığını anlamak zor değil. Bu nedenle de insanda pek uyku kaçırıcı etki yapmaz.

İlginç olan, dilde sayıları temsil etsin diye çıkardığımız seslerin, nasıl olup da öyle oldukları. Benim takıntım burada.

Türkçemizde, bir sesini çıkarınca 1 sayısını kastediyoruz ve 1 rakamıyla gösteriyoruz. 0'dan 10'a kadar her sayı için başka sözcüklerimiz var. İki (2 işaretiyle gösteriyoruz), üç (3 işaretiyle) ve devam ediyoruz. On bir, sanki dilimizin tarihiyle birlikte on tabanını biliyormuşuz gibi, on ve bir seslerinin bileşimidir. On + bir dermiş gibi. Bu yöntemle 20 sayısına kadar, belki işin sırrını bulmuş gibi gelirsiniz ama, oraya gelince dur: Yirmi kelimesi nereden çıktı bilinmez. Yirmi sesi neren çıktı değil mi? Yani "ikion" benzeri bir sesle söyleyemez miydik? 20 rakamı işin aslının 2 tane 10 olduğunu zaten anlatıyor. Ne oldu dilimizin, ta baştan on tabanına göre basamaklı sayıları keşfettiği duygusuna. Çöpe mi atalım? Otuz ve kırk da öyle. Nereden geldiler, ya da neden gerek duydu acaba atalarımız? Üçon, dördon, beşon, altıon da diyebilirlerdi. Ya da daha uygun olarak **ik**miş, **üç**müş, **dört**müş, **beş**miş, **altı**mış, **yet**miş, **sek**sen (neden **sek**miş değil?) **dok**san (**dok**muş) demek varken, ne akla hizmet yirmi, otuz, kırk uydurmuşlar? Hele elli, elli aklıma zarar veriyor. El ile ilgisi ne acaba? Yani bir elde beş parmak hesabıyla. Hemen aklıma "bir elde beş parmak" şarkısı geliyor. Diyeceksiniz ki; " iyi de bu bir dil sorunu, matematikle ilgisi yok ki!" Öyle mi acaba? Gel de benim takıntılı kafama, gecenin bir yarısında anlat!

İşin aslı, ben matematiği bu rahat kaçıran, takıntı yapan özelliklerinden dolayı seviyorum.

Uykunuzu kaçıran matematik olsun! Bundan iyisi Şam'da kayısı!

Muammer Abalı