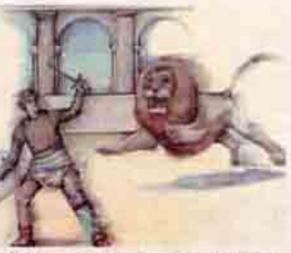
Zekâ Oyunları
Selçuk Alsan

Aslan ve Gladyatör



Bir arenada hızları birbirine eşit bir aslanla bir gladyatör var.

a) Kanıtlayınız ki gladyatör herhangi bir daire çizecek şekilde koşarsa, aslan onu daima yakalayabilir! (Çizimde iki daire kullanacaksınız.)

b) Kanıtlayınız ki gladyatör, bir daire üzerinde koşarken birden 180° geri dönerek, yine aynı daire üzerinde fakat ters yönde koşmaya başlarsa, aslan yeni bir plan oluşturarak onu yine daima yakalayabilir! (Çizimde üç daire kullanacaksınız.)

c) Roma İmparatoru aslanı özel bir eğitimden geçiriyor. Öyle ki gladyatör nerede olursa olsun, aslan daima gladyatörü dairenin merkezine birleştiren doğru üzerinde, gladyatörle merkez arasında bulunuyor. Bu koşullarda daire biçimi bir arena içinde, gladyatörün daire biçimi olmayan özel bir yol izleyerek aslandan daima kurtulabileceğini ve bu yolun arena duvarını kesmeyeceğini kanıtlayınız.

d) İmparator c şıkkında gladyatörün kurtuluşuna öfkeleniyor ve arenaya yalnızca gladyatörü ve özel eğitim görmemiş bir aslanı gönderiyor. Kanıtlayınız ki bu koşullarda da gladyatör, belli bir strateji uygulamak suretiyle, daire biçimi olmayan özel bir yol izleyerek aslandan kurtulabilir.

e) İki aslana (daha genel olarak n aslana karşı) karşı tek bir gladyatörün, kurtulma şansı var mıdır? (Scientific American, Nisan 1992'den)

Basit Bir Çıkarma

$3^{1999} - 7^{1997}$ nin son basamağı nedir?

Uzayda Çoğalma

Multiplos yıldızındaki yaratıklar yok olurken kendilerine benzer 8 veya 12 kopya yapıyorlar. Bunun için eşe ihtiyaçları yok. Böyle bir yaratığın evinde birkaç nesil sonra 60 yavru olabilir mi?

Dâhi miyim Neyim?

Kafaboş bir buluş yaptığını ileri sürerek Dâhiler Klubüne başvurdu ve heykelinin dikilmesini istedi. Şunu bulmuştu: "Doğal bir sayı 27 ile bölünürse, basamaklarının toplamı da 27 ile bölünür ve doğal bir sayının basamaklarının toplamı 27 ile bölünürse o sayı da 27'ye bölünür" Siz ne dersiniz?

Yaz Okulu

TÜBİTAK matematik Yaz Okulu'na gelenler şunlardı: Yusuf, Tarık, Levent, Kemal ve Bedri. Geldikleri şehirlerse Ankara, İstanbul, İzmir, Adana ve Antalya idi. Ankaralı, Antalyalı ile Bedri arasındaydı. İstanbullu, Yusuf ve Tarık arasındaydı. İstanbullunun karşısında Adanalı ve Levent vardı. Kemal hiç İstanbul'a gitmemişti. Yusuf İzmir'i bilirdi, ama Antalya'yı bilmiyordu. Antalyalı ile Tarık mektuplaşırlardı. Hangi genç hangi şehirde yaşıyordu?

Üç Çarpanlı Sayılar

Asal sayıların iki farklı çarpanı vardır; kendisi ve 1. Hangi sayıların 3 farklı çarpanı vardır?

Kaç Böleni Var?

$2^{7}.3^{10}.\ 7^{15}.11^{9}$ sayısının kaç böleni vardır?

Cin Ruhi Karnavalda

İlkbaharın güzel günlerinden birinde sınıfta "Matematik Karnavalı" yapıldı. Cin Ruhi'nin yüzünü gözünü boyayıp, kafasına da garip bir karnaval şapkası geçirip onu "cin" yaptılar. Peri Perihan tavşan, Şeytan Şeyda kedi, Balaban amca aslan ve Deli

Ruhiye doktor kılığındaydı. Minnoş uzaylı olmuş, Kafaboş iskelet kılığına girmiş, Ruhi'nin köpeği Ruh'a bile bir buldog maskesi takılmıştı. Herkes 1 bilmece soracaktı ve en çok puan alan günün "beyni" seçilecekti. İşte Cin Ruhi'nin tahtaya yazdığı bilmece;"** 198*7 sayısı hangi sayının 5. kuvvetidir?" Yanıt süresi 15 saniye. Kimin "beyin" seçildiğini söylemeye gerek yok sanırım. (Yıldız yerine sayı koyunuz). (Hesap makinesi serbest)

Dünyayı Yerinden Oynatmak

Arşimed şöyle demişti: "Bana uygun bir dayanak noktası verin, Dünya'yı yerinden oynatayım. "Dünyanın ağırlığı 6.20^{24} kg olduğuna, Dünya kaldıraçın bir ucundan 1 m öteye konduğuna ve kaldıraçın öteki ucuna en çok 50 kg lik bir kuvvet uygulanabildiğine göre bunun mümkün olup olmadığını araştırınız.

Yere Düşen Muhasebe Defteri

Bay Ayvaz Haktanımaz'ın bürosu malî polisçe basıldığında Ayvaz Bey muhasebe defterini alarak kaçmayı yeğledi. Kaçarken defterin içinden bir bölüm yere düştü. Cinnoş yere düşen parçanın ilk sayfasının 387 olduğunu görmüştü; yere düşen parçanın son sayfasının numarasının ise 387 sayısındaki 3, 8 ve 7'nin değişik bir sırayla yazılışı olduğunu görebilmişti. Ayvaz geri dönüp düşürdüğü parçayı aldı ve köprüden ırmağa attı. Demek ki korktuğu hileli sayfalar bunlardı. Düşen parça kaç sayfa idi?

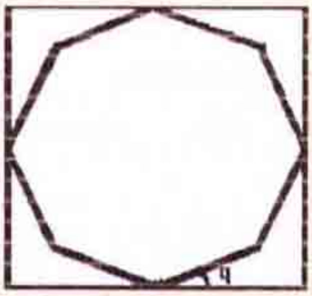
Sayı Olasılığı

0'dan 9'a kadar olan sayıları kullanarak, 0'ı ilk 4 basamaktan ve 9'u son 3 basamaktan birine koyarak kaç sayı üretebiliriz?

Savaş ve Barış

Eski zamanlarda ülkelerden birinde, herhangi iki kişi arasında ya dostluk ya düşmanlık varmış. Yine bu ülkede her kişi her an dost olduklarına düşman, düşman olduklarına dost olabilirmiş. Nüfusun üçte biri dost, üçte ikisi düşman sıfatı taşıyormuş. İspatlayınız ki bu ülkenin nüfusunun tamamı dost olabilir.

Kare İçi Sekizgen



Yukarıda, bir kare içine çizilmiş düzgün bir sekizgen görülüyor. Sizin göreviniz, q açısını hesaplamak. (Gökhan Yazıcı'dan)

En Kısa Yol

İvan Tsareviç sevgilisi Prenses Vasilisa Prikrasnaya'ya kavuşmak için yollara düşmüştü. Orman adamı Leşiy kendisinin prensesin sarayına nasıl gittiğini şöyle anlattı: "Oraya 4 gün 4 gece giderek varabildim. İlk 24 saat hep Kuzey'e giderek yolun 1/3'ünü katetmiş oldum. Sonra Batı'ya dönerek ormana girdim. Ormanda hızım yarı yarıya azaldı. Ormanda 24 saat Batı'ya, sonra yine ormanda 24 saat Güney'e gittim. Ormanda geçen 48 saatle yolun 1/3 ünü daha almıştım. Bu noktada Doğu'ya dönüp son 24 saatte 100 km. yürüyerek prensesin sarayına vardım. Sen de benim gibi yap oğlum. "İvan Tsareviç "Hayır Leşiy" dedi. "Sen yanılmışsın". Siz olsanız kaç günde kaç km. yürüyerek prensese varırdınız?

İlk Üçe Girme Olasılığı

10 kişinin rastgele dizilişinde bir kişinin ilk 3'e girme olasılığı nedir? (1., 2. veya 3. olma.) 1. olma olasılığı nedir?

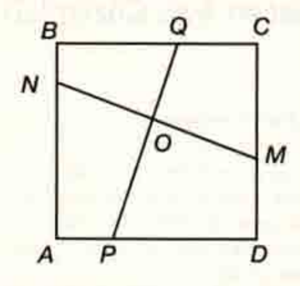
İlginç Bir Modül Problemi

Üsleri exp ile göstereceğiz; örneğin 2^2 yerine 2 exp2 exp2 yazacağız. Buna göre, 7 exp7 exp7 exp7 exp7 exp7'nin son iki basamağı hangi sayılardır? (Metin Tabalu'dan, Ankara Atatürk Lisesi)

Bir İspat

ABCD karesi içine birbirine dik MN ve PQ doğruları çizilmiş olsun.

Kanıtlayınız ki sol alt dörtgenle sağ üst dörtgenin çevresinin toplamı, sol üst dörtgenle sağ alt dörtgeninin çevresinin toplamına eşittir.



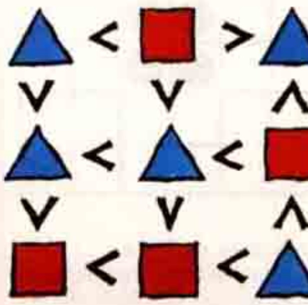
Özel Durum

1'den 9'a kadar olan bu sayıların durumu özelleştirilmiş; öyle ki sol alt ve sağ alt köşelerden bakınca çok özel bir ilişki görüyorsunuz. (14+58= 72 ve 48+15= 63 ve 7+2= 9; 6+3= 9). 1'den 9'a kadar olan sayılarla buna benzer bir başka özelleştirme yapınız.

Saç Renkleri

Satranç ustası Gribof, tenis şampiyonu Karamazof ve yüzme şampiyonu Alyoşa, Spor Sarayının bahçesinde karşılaştılar. Gribof kara saçlıya şöyle dedi: "Üçümüzün adı da bir renk ile başlıyor: Gri, Kara ve Al. Saçlarımız da ne tesadüf, gri, kara ve al (kırmızı saç). Fakat hiç kimsenin saçı adının belirttiği renkte değil". Her birinin saçları ne renk? (Kvant'dan)

123456789 ve Eşitsizlik



Üçgenler tek, kareler çift sayıları temsil etmek üzere 1'den 9'a kadar olan sayıları yukarıdaki şekiller içine yerleştirin.

Briç

Okan Zabunoğlu

Striptiz

B/Yok

	♠83 ♥AVT8632 ♦53 ♣85	
♠AD9742 ♥D5 ♦94 ♣743	K B D G	♠T6 ♥R94 ♦RVT862 ♣VT
	♠RV5 ♥7 ♦AD7 ♣ARD962	

Batı Kuzey Doğu Güney
2♠P3♠3SA
P4♥P5♣
P.

Batı zayıf 2♠ (6-kart ♠, 5-10 puan) açtıktan sonra Güney tarafından ulaşılan 5♣'e koz atak edildi. Kontratı yapmanın yegane yolu Batıya karşı "striptiz" uygulamak. İlk löveyi mecburen elden kazanır ve ♥A ile yere gidip ♦ empası ile ele gelir, ♦A çekip yere bir ♦ çakarız. ♥'e çakarak ele geçer ve iki tur koz çekeriz. Batının striptizi tamamlandı; elinde yalnızca ♠'ler kaldı. Şimdi ister ♠R oynayalım, ister ♠V, bir ♠ lövesi alarak 11 löveye ulaşırız. *[Bu el 1997 Avrupa Şampiyonası bültenlerinden alınmıştır.]*

Geçen Sayıdan

♠A62 ♥ADT ♦D962 ♣ADV	K B D G	♠DV4 ♥R7 ♦VT853 ♣852

Güney ♠ ile araya girdikten sonra Batı tarafından 3SA, atak: ♠8'li; nasıl oynamalı?
♦onörlerinin ikisi de Güneyde ise yapacak bir şey yok, muhtemelen 3♠ ve iki ♦ kaybederek batarız. Ama en aza bir ♦ onörü Kuzeyde ise ilk ♠'e elden ve yerden küçük oynayarak 3SA'ya yapabiliriz. İlk ♠'e yerden onör koyarsak Güney küçük verir ve ilk ♦'yu Kuzey kazanarak ♠ dönünce batmaktan kurtulamayız. Güneyin eli: ♠RT953 ♥V53 ♦A4 ♣R97.

Nasıl Oynamalı?

Batı tarafından 6♣, atak: ♠R. Güneyin ♦'ları RT82, ♣'leri R6 iken konratı yapmanın bir yolu var mı?

♠A43 ♥ART3 ♦9 ♣DV973	K B D G	♠T96 ♥7 ♦ADV53 ♣AT85

Geç Kalan Yanıt

	♠V83 ♥86 ♦DT854 ♣RV7	
♠A75 ♥AV43 ♦AR9 ♣852	K B D G	♠R4 ♥R75 ♦7632 ♣A543

Batı tarafından 3SA, atak: ♦5'li (en iyi dördüncü), Güneyden ♦V. Nasıl oynamalı? Temmuz sayısında "Ustalar İçin" başlığı altında sorduğumuz bu zor ve güzel elin yanıtını (Ekim sayısında yanıt yerine el tekrar soruldu) çeşitli talihsizlikler ve hatalar nedeniyle henüz sizlere ulaştıramamıştık, özür dileriz.

7 kesin lövemiz var, sekizinci löve ♥ empasından gelmeli; yani ♥D Güneyde olmalı. ♥'ler partaj (3-3) ise sorun yok, kolayca 9 löve. ♥'ler partaj değilken yegane ilave şans ♣'lerin partajını umarak yerin dördüncü ♣'ine yetişmek. Bunun için ise dışarı iki kere ♣'den el vermek şart. Ancak, eğer Kuzey iki kez el tutarsa, sağ ♦'larına yetişir ve 5- kart ♦'su varken 2♣ ve 3♦ lövesi alarak kontratı batırır. O halde tüm sorun Kuzeye en çok bir kere el verecek şekilde ♣'ten iki el bağışlayabilmek.

İlginçtir, ama bunun en iyi yolu ilk ♣'i yerden 9'luya doğru küçük oynamak! ♥R ile yere geçelim ve küçük ♣ oynayalım. Diyelim ki Güney ♣6'lı verdi; 9'lu ile örteriz, Kuzey ♣V ile alıp ♦D döner. ♦'yu kazanıp ♣2'li oynarız ve Kuzeyden ♣7'liyi görünce (dışarıdaki en küçük ♣) yerden küçük veririz. Kuzeyin ♣'leri RD7 de olsaydı, ilk ♣'i yerden oynadığımız için, kazanırdık. Yerimizin darlığı nedeniyle analizi genişletmek sizlere kalıyor.

Düzelti: Kasım 97 sayısı Briç köşesinde Nasıl Oynamalı? sorusu eksik çıkmıştır. Tamamı aşağıdaki gibidir.

Güney ♣ ile araya girdikten sonra Batı tarafından 3SA; atak: ♣8, nasıl oynamalı?

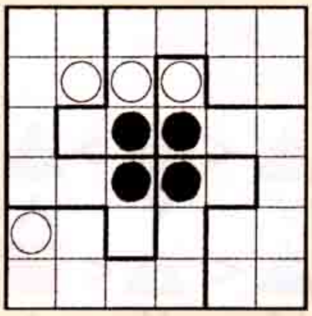
Geçen Ayın Çözümleri

Futbol Turnuvası

Turnuvaya n takım katılmışsa ve yengi 2, berabere 1 ve yenilgi 0 puansa, sonuçlar ne olursa olsun toplam puan n(n-1)dir; bu turnuvaya 5 takım katılmıştır ve toplam puan 5x4= 20'dir.

Birinci gelen takımın puanları 2+2+2+1, ikincinin 2+2+1, üçüncünün 2+1 dir. Sonuncu (beşinci) 1+1= 2 puan almıştır. Bir başka takım da 2+1=3 puan almıştır; bu durumda attığı gol>yediği gol olan tercih edilir.

Tanklar ve Benzin Depoları



Suda Balık Yan Gider

Balığa etki eden kaldırma kuvveti hep aynı kalır. Bu sayede balık dipten etkilenmeden hep yatay yüzebilir. Aksi halde, balığın hacmi ve ağırlığı aynı kaldığına göre, balığın dip durumuna göre bir alçalıp bir yükselmesi gerekirdi.

Üç Kapalı Kutu

Üstünde bir siyah, bir beyaz bilye resmi olan kutudan bir bilye çekilir. Bu kutunun içinde aynı renkten 2 bilye olmak zorundadır (çünkü etiketinin karşıtı olmak zorunda). O halde bu kutudan tek siyah çıkarsa iki siyah burada olmalıdır. O zaman iki beyazın iki siyah etiketli kutuda olması gerekir, tabii ki 1 siyah, 1 beyaz da iki beyaz etiketli kutudadır. Çektiğimizde beyaz çıkarsa iki beyaz burada, iki siyah iki beyazlı da ve 1 siyah +1 beyaz iki siyahlıdadır.

Kitap Dağıtımı

Hayır, edemeyiz. Her öğrenciye farklı sayıda kitap verebilmek için 1+2+3+....+30=465 kitap gerekir. Oysa elimizde 450 kitap vardır. En az 2 öğrenci aynı sayıda kitap alacaktır.

Füze İçinde Mum

Hayır. Mumun yanabilmesi için gerekli olan iki şey füzede yoktur; 1) Oksijen. 2) Isınan havanın yükselmesi→yerine çevreden bol oksijenli ve az karbon dioksitli taze havanın gelmesi (hava konveksiyon akımları).

Yabancı

7 3 1 → 7 + 3 + 1 = 1 1 ; 462→4+6+2=12; 517→5+1+7=13; 365 →3+6+5=14.

Fakat, 648→6+4+8=18. Yabancı bu tabii. Diğerlerinin basamak toplamları ardışık:11,12,13,14.

Fraktal Üçgen Problemi

a)13. b)13.

c) En çok iç içe 5 üçgen çizilebileceği bilgisayarda BASIC programıyla ispat edilebilir.

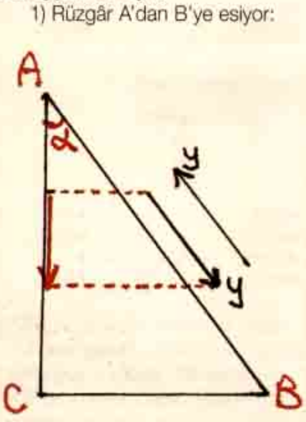
Üçgenler: 1+4+9=2+8+4=14, (1+2+4)=7 ve 4+8+9=21 üçgenleridir.

Sınavda Olay

"Deha karşısındakini ezer geçer."

Diküçgen ve Uçak

1) Rüzgâr A'dan B'ye esiyor:



Uçak A→ B →C yönünde çevreyi dolaşırken uçağın hızı x, rüzgârın hızı ise y olsun. AB kenarı üzerinde uçağın hızı x+y, BC üzerinde x ve CA üzerinde x-y cos α olur.

2) Rüzgâr B'den A'ya esiyor: Uçağın AB'deki hızı x-y, BC'deki hızı x ve CA' deki hızı x+y cos α olur. 1'deki ortalama hız 3x+(y-y cos α). 2'deki ortalama hız: 3x-(y-y cos α). Görülüyor ki rüzgâr A'dan B'ye eserse uçağın ortalama hızı daha büyüktür.

Sayılar Dansı

n sayı $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$ olsun.

$$\left.\begin{aligned} 2a_1 &= a_2 + a_3 + \dots + a_n \\ 2a_2 &= a_1 + a_3 + \dots + a_n \\ &\;\;\vdots \\ 2a_n &= a_1 + a_2 + \dots + a_{n-1} \end{aligned}\right\} (2)$$

Buradan şu elde edilir: $2(a_1+a_2+\dots+a_n)=(n-1)(a_1+a_2+\dots+a_n)$ veya $(n-3)(a_1+a_2+\dots+a_n)=0$. Buradan da n=3 veya $a_1+a_2+\dots+a_n=0$. n>3 için $a_1+\dots+a_n=0$ ve (2) den $a_1=a_2=\dots=a_n=0$. Bu ise problemin saçma bir sonuca varması demektir. n=3 için (2) sistemi şöyle çözülebilir: $a_1=a_2=a_3=1$. Gerçekten de 1= (1+1)/2.

Çift Motorlu Problem

Birinci motorun ırmağa göre hızı v, ırmağın hızı u ve birinci motorun A'dan B'ye gelmesi için geçen zaman t olsun.

A ile B arası mesafe= (u+v)t=S. İkinci motor t zamanında L= (v-u)t kadar yol gider. t zamanı sonunda 2. motorun A noktasından uzaklığı S-L= 2ut dir. Sal t zamanda ırmağın hızıyla ut kadar gider. 2ut, ut'nin 2 katı olduğundan, sal A noktasıyla 2. motor arasındaki mesafenin tam ortasında bulunur.

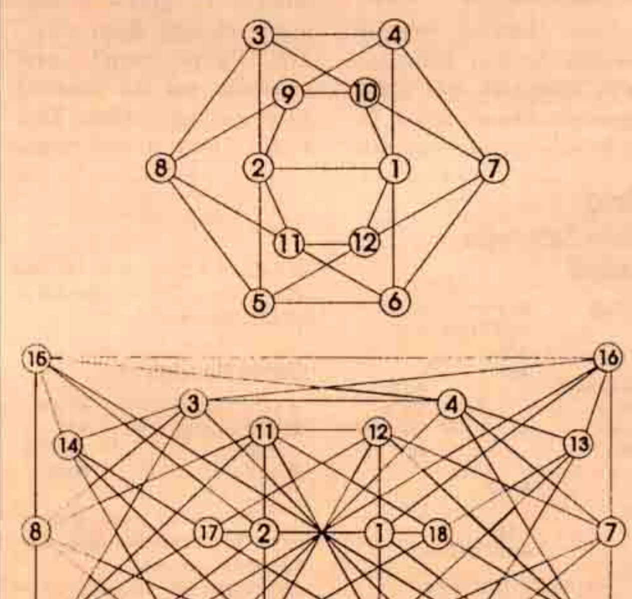
Küp İskeleti Oluşturmak

Oluşturulamaz. Kütüğün boyutları axaxb olsun; bu durumda 12 kütüğün toplam hacmi $12a^2b$ olur. Küpün bir kenarı x'e eşitse, küp iskeletinin hacmi şudur:

$$x^3-(x-2a)^3-6a(x-2a)^2=12a^2b.$$

Buradan $x=b+\frac{4}{3}a$. Açıkça bellidir ki x uzunluğu sadece b, b+a veya b+2a olabilir. Demek ki bu sonuç saçmadır; yani böyle bir iskelet (çatı) oluşturulamaz. [Kenarı x olan küpün hacminden (x^3 den) iki hacim çıkarılmıştır: a) Ortada bir ke-

Asal Sayı Simetrisi



nanı (x-2a) olan kübün hacmi (a= karekesitli kütüğün taban kenarı uzunluğu) vardır. Önce bu çıkarılır. b) Sonra tabanı $(x-2a)^2$ ve yüksekliği a olan 6 prizmanın hacmi çıkartılır (her yüzde 1 prizma); geriye kalan, 12 kütükten ibaret küp iskeletinin hacmidir].

Kolay mı Zor mu?

737=67x11. Bu üç sayı da asaldır. O halde ya sınıfta 67 öğrenci vardır; her biri 11 kitap almıştır; ya da sınıfta 11 öğrenci vardır ve her birine 67 kitap dağıtılmıştır.

Düşündürücü Sayılar

Verilen üç haneli 9 sayının çarpımı $-a^2b^2c^2d^2e^2f^2g^2h^2k^2$ dir. O halde 9 sayının hepsi + veya hepsi - olamaz.

Children Deneyi

a) Seri bağlama: $I=\frac{V}{R_1+R_2}$. (I=akım şiddeti (amper), V=voltaj, R_1ve R_2= 1. ve 2. telin direnci.) $R_1=p.\frac{L}{r_1^2}$ ve $R_2=p\frac{L}{r_2^2}$ (r_1 ve r_2 tellerin yarı çapları). Watt olarak güç: $N=I^2R$. $N_1=\frac{V^2}{(R_1+R_2)^2}.R_1$ ve $N_2=\frac{V^2}{(R_1+R_2)^2}.R_2$ Telin sıcaklığı değişmediği zaman tel etrafına şöyle bir güç dağıtır: N=ks $(T-T_0)$. (K= oran katsayısı; s=2πrL (tel yüzeyi), T= telin sıcaklığı, T_0= çevrenin sıcaklığı, Denge durumunda N=N O halde:

$$\frac{V^2}{(R_1+R_2)^2}.R_1=k.2\pi r_1 L\,(T_1-T_0)$$

$$\frac{V^2}{(R_1+R_2)^2}.R_2=k.2\pi r_2 L\,(T_2-T_0).$$

Taraf tarafa bölünce $\frac{(T_1-T_0)}{(T_2-T_0)}=\frac{R_1}{R_2}\cdot\frac{r_2}{r_1}$ ve $r_2>r_1, R_1>R_2$ olduğundan $T_1-T_0>T_2-T_0$ veya $T_1>T_2$. Paralel bağlamada

$$N_1=\frac{V}{R_1} \text{ ve } N_2=\frac{V}{R_2}, N_1 \text{ ve } N_2$$

(k2πrL. $(T-T_0)$) a eşit yazılırsa $\frac{T_1-T_0}{T_2-T_0}=$

$\frac{R_2}{R_1}\cdot\frac{r_2}{r_1}$ bulunur. $R=p.\frac{L}{r^2}$'den

$\frac{T_1-T_0}{T_2-T_0}=\frac{r_1}{r_2}<1$ veya $T_1<T_2$ bulunur.

Ghastleigh Grange Cinayeti

Katil Kâhya Dennett'di. Dennett "her kuleye yalnız bir kere girdim" derken yalan söylüyordu. Şekil 1'de görüldüğü üzere Dennet'tin her kuleye yalnız bir kere girerek kapalı bir eğri oluşturması imkânsızdı. Dennett, Miss Beetroot'un odasına (bordo renkli) ikinci bir defa girmiştir. Dennett Miss Beetroot'a "iyi geceler" diledikten sonra ara kapıyı kilitleyerek yaşlı, sağır ve uykucu Amaranth düşesinin odasında (eflatun renkli) saklanmış, herkesin çan ipini çekerek yerinde olduğunu bildirmesini beklemiş, sonra kitlediği kapıyı tekrar açarak Miss Beetroot'u kafasına ağır bir şey vurarak öldürmüş, sonra daha önceden gevşettiği âvizeyi cesedin üstüne düşürerek anlaşılmasın diye kafadaki yarayı ezmişti. Kuleler ses geçirmez yapıldığından âvizenin düşmesi duyulmamıştı. Holmes olayı matematik olarak çözmüştü. Yukarıdaki kapalı eğrinin çizilmesine ömür yetmez; çünkü, 46 kule 46! türlü gezilebilir! İlk defa İrlandalı matematikçi William Rowan Hamilton, bir yirmi yüzlünün köşelerinin birinden başlanarak bütün köşelerden yalnız bir kere geçilebileceğini ve böylece başa dönülerek kapalı bir eğri çizilebileceğini gösterdi. Bu yirmi yüzlüyü (icosahedron) oyuncak şeklinde yaptı ve milyonlarca sattı. Hamilton eğrisi denince bir ağ (network) sisteminde her düğümü (nod) bir kere ziyaret ederek başa dönen kapalı bir eğri veya devre (closed circuit) anlaşılır. Bir ağ sisteminde Hamilton eğrisinin olup olmadığı ancak yap-bozla (denemekle) anlaşılıyordu. Sonradan Rus matematikçisi E.J. Grinberg bir ağ sisteminde Hamilton eğrisi olup olmadığını kanıtlayacak bir formül geliştirdi. Bunun için şekil 2'ye bakalım.

Şekil 2'de 19 yolla birleştirilmiş 13 düğüm görüyoruz. Bu 13 düğümden kırmızıyla gösterilen bir Hamilton eğrisi geçiyor. Bu kapalı eğrinin içinde ve dışında kalan yollar var; bunlara iç köşegenler (mavi) ve dış köşegenler (yeşil) deniyor. Bu köşegenler ağ sisteminde bölgeler yaratmış. Görülen sayılar her bölgeyi çevreleyen yolların sayısıdır. Örneğin 2 yazan bölgenin etrafında 2 yol (1 kırmızı+1 mavi), 6 yazan bölgelerin etrafında 6 yol (3 kırmızı+ 3 mavi ve 5 kırmızı+1 mavi), 5 yazanın etrafında 5 yol (4 kırmızı+1 mavi) görülüyor. Dış köşegenler de (yeşil) bölgeler oluşturmuş: 3 kenarlı (iki kırmızı, bir yeşil) ve 7 kenarlı (şeklin en dış çevresinin dışında kalan bölgedir. 7 kenar için şeklin en dış kenarına bakınız; 4 kırmızı + 3 yeşil olarak 7 kenar var). J kenarı olan iç bölgelerin sayısına f_j, j kenarı olan dış bölgelerin sayısına g_j diyelim. İki kenarlı bir bölge var; o halde $f_2=1$; 5 kenarlı 1 ve 6 kenarlı 2 bölge var; o halde $f_5=1$ ve $f_6=2$. J kenarlı olan dış bölgelerin sayısına g_j diyelim. 3 kenarlı 2 dış bölge var: $g_3=2$; altı kenarlı bir dış bölge var: $g_6=1$ ve yedi kenarlı bir dış bölge var: $g_7=1$. Bu ağ sisteminin Hamilton eğrisi varsa şu formül (Grinberg formülü) gerçekleşir: $(f_3-g_3)+2(f_4-g_4)+3(f_5-g_5)+4(f_6-g_6)+7(f_7-g_7)=0$. Bu, Grinberg formülüdür. Şekil 2 ye bu formülü uygulayalım: (0-2)+2(0-0)+3(1-0)+4(2-1)+5(0-1)= -2+3+4-5=0. Böylece yap-bozsuz bir yöntemle bu noktaların (düğümlerin) Hamilton eğrisi olduğunu kanıtladık. Not edelim ki şekil 2'deki kırmızı eğrinin içindeki üç iç köşegen, dört bölge belirlemiştir. Köşegen (diagonal) sayısı d ise bölge sayısı (d+1) dir. 2 kenarlı iç bölge sayısına f_2, 3 kenarlı bölge sayısına f_3,..., n kenarlı iç bölge sayısına f_n dersek iç bölgelerin sayısı $f_2+f_3+....+f_n=d+1$'dir*. (Örneğin şekil 2'de $f_2=1$, $f_5=1$,$f_6=2$ dir; d=3'dür (3 iç köşegen) ve $f_2+f_5+f_6=d+1$'den 1+1+2=3+1=4).

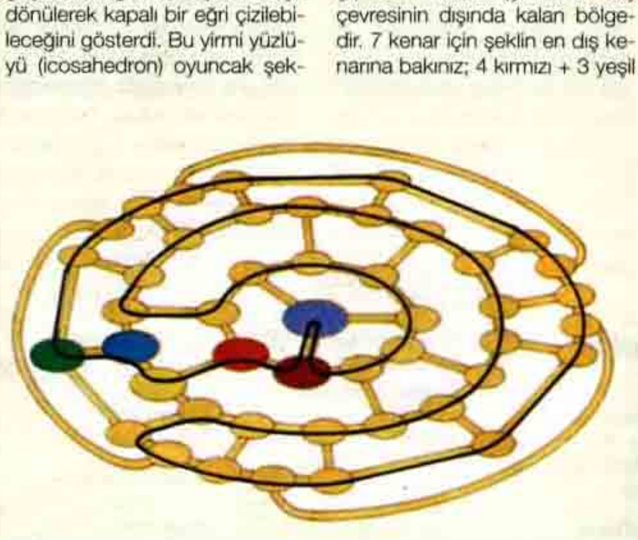
Şimdi bölgeleri saran kenarların sayısına gelelim. j kenarlı bölgeden f_j tane varsa bu bölgenin toplam kenar sayısına katkısı jf_j'dir. O halde

$2f_2+3f_3+4f_4+5f_5+...+nf_n=2d+n$ dir.** Eşitliğin sol tarafı d köşegen içeren bir kapalı devre içinde toplam kenar sayısıdır. Köşegenlerde tabii ki birer kenardır ve bu sayışta ikişer kere sayılmışlardır (Köşegen iki komşu bölgeyi ayırınca her iki bölge ile de sayılmıştır). Kapalı eğrinin en dış sınırı üzerindeki toplam kenar sayısı n dir. Bu nedenle

$2f_2+3f_3+4f_4+5f_5+...nf_n=2d+n$**

[Şekil 2'ye bakarak bunu doğrulayalım. $f_2=1$, $f_5=1$, $f_6=2$'den ** formülüne göre 1.2 +1.5+2.6=2.3+13. Burada 3 iç köşegen sayısı ve 13 kırmızı çizgideki kenar sayısı] * işaretli denklemi 2 ile çarpıp az önceki ** denkleminden çıkartalım. Sonuç $f_3+2f_4+3f_5+...+(n-2)\ f_n=n-2$. Benzer yolla: $g_3+2g_5+...+(n-2)g_n=n-2$ Taraf tarafa çıkarma yapalım: $(f_3-g_3)+2\ (f_4-g_4)+3(f_5-g_5)+...+(n-2)(f_n-g_n)=0$. Böylece Grinberg formülünün nasıl çıktığını da gördük. Bir noktalar (düğümler) sistemi (network) Grinberg formülüne uyuyorsa, o noktalardan kapalı bir eğri geçirilebilir demektir.

Şimdi sorudaki şekle bakalım, Şatodaki bölgeler 5, 8 veya 9 kenarlıdır. Şeklin en dış kenarındaki yolları sayarsanız sayısı 9 dur. $3(f_5-g_5)+6(f_8-g_8)+7(f_9-g_9)=0$. $f_9-g_9=\pm1$ olmalıdır. Buna göre, $3(f_5-g_5)+6\ (f_8-g_8)=\pm7$ olur. Eşitliğin sol tarafı 3'le bölünüyor; sağ tarafı ise bölünemiyor. Demek ki şatodaki 46 kule bir Hamilton eğrisi, yani her noktadan tekrarsız geçilebilecek bir sistem oluşturamaz. Dennett yalan söylemiştir; odalardan birine mutlaka ikinci bir defa girmiştir. Şekil 1'de bunun Miss Beetroot'un odası olduğunu grafik olarak görmüştük. (Graf teorisi üzerinde daha fazla okumak isteyenlere Ron Gould'un, Graph Theory kitabını -Benjamin Cummings Publ., 1988- tavsiye ederiz).



Şekil 1 Kâhya Dennet'in izlediği yol

Şekil 2