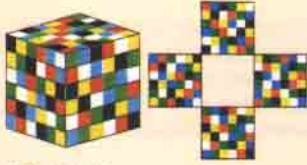


Geçen Ayın Çözümleri

Kafayı Tam Patlatan Problem



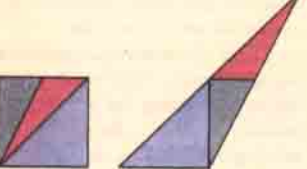
Çölde Yolculuk

2 hamal. Gezgin ve iki hamal sabahı yola koyulurlar. Her birinde 4 gün yiyecek yiyecek vardır. 1. günün sonunda her birinde 3 günlük yiyecek kalmıştır. Hamallardan biri yanına bir günlük yiyecek alarak geri döner, kalan 2 günlük yiyeceği kalan 2 kişiye bırakır. Şimdi gezgin ve hamalın dördür günlük yiyecekleri vardır. İkinci günün sonunda gezgin ve hamalın üçer günlük yiyecekleri kalır. Hamal yanına 2 günlük yiyecek alarak geri döner, kalan 1 günlük yiyeceği gezgine bırakır. Böylece ikinci günün sonunda gezginin 4 günlük yiyeceği olmuştur, geçmesi gereken yol da 4 günlükdür, bu yiyecek ona yeter.

Bir Savaş Problemi

ABCD karesini saat yönünde merkezi etrafında 90° çevirin. A, B'ye; B, C'ye; C, D'ye ve D, A'ya getir. Kenarları birbirine dik olduğundan HAB ve HBC açılan eşittir; bu nedenle AH, BO ile çakışır. Benzer mantıkla BH, CO ile, CH, DO ile ve DH, AO ile çakışır. AO, BO, CO ve DO bir noktada kesiştiğinden onlarla çakışan AH, BH, CH ve DH de bir noktada çakışmalıdır.

Kare ve Üçgen



1000 Köşeli Sur

Şehrin birbirinden en uzak iki köşesi A ve B olsun. A ve B'yi birleştirelim. AB doğrusunun alt tarafında kalmış olan herhangi bir nöbetçiyi ele alalım. Buna C diyelim. Açıkça bellidir ki C, AB doğrusunun üst tarafında kalmış hiçbir nöbetçiyi göremez; çünkü nöbetçiler surun dışında durduğundan C ile AB doğrusunun üst tarafında kalmış nöbetçilerin arasında surlar vardır. AB doğrusunun alt yanında 500 nöbetçi olabilir. Demek ki C'nin gördüğü nöbetçi sayısı 500'den az olabilir.

Mantığın Gücü

Tahmin etmek zor değildi ki bu 11111111'un karesidir. Alttaya yazıp çarpımın neden böyle çıktığını göreceksiniz.

Bakteri- Virüs Savaşı

k dakika sonra bakterin sayısı (n-k). 2ⁿ dir. Görülüyor ki k-n olunca geriye bakteri kalmayacaktır, yani bakterin sayısı kadar dakika geçince, bakteriler tükenecektir.

Mantık Yoluya Kautlama

Bu gerekten çok nefis bir mantık uygulaması. Takımlardan herbirinin değişik sayıda maç yaptığını varsayalım: 1. takım 0 maç, 2. takım 1 maç, 3. takım 2 maç, 4. takım 3 maç, 5. takım 4 maç, ..., 30. takım 29 maç yapmış olsun. 30. takımın yaptığı maç sayısı 29 olduğuna göre 30. takım bütün diğer takımlarla maç yapmış demektir; halbuki 1. takımın hiç maç yapmış kabul etmiştik. Demek ki "her takım farklı sayıda kaç yapmış" varsayımı sonucu 30. takım 1. takımla maç yapmamış oluyor, oysa aksini kabul ettik. Demek ki çelişki var, böyle bir şey olamaz, yani her takım farklı sayıda maç yapmış olamaz. En az iki takım aynı sayıda maç yapmış olmalıdır. Örneğin 30. takım 29 maç yapmışsa 1. takım da en az bir maç yapmış demektir; 1. takım hiç maç yapmamışsa 30. takım en fazla 28 maç yapmış olur. Her iki halde de en az iki takım aynı sayıda (1 ve 1 veya 28 ve 28) maç yapmış demektir.

Çiçekler Açarken

12345679 x 9 = 111111111

Olanaksız Olanaklı Kılınak

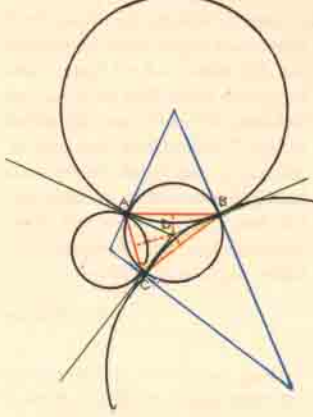
Sarı üçgenin alanına x, siyah dörtgenin z, AOD üçgeninin x, OBE üçgeninin y diyelim.

ABD ve BCD üçgenlerinin yükseklikleri eşit olduğundan (B tepesi ortak) alanların oranı tabanların oranına eşittir. $(x+z) / (z+y) = 3/2$. Fakat AEC üçgeninin alanı = $(x+z)$ ve ABE üçgeninin alanı = $(z+y)$. O halde AEC Alanı/ABE alanı = $3/2$ ve buradan EC/BE = $3/2$ ve EC/BC = $3/5$.

Barış ve Matematik

Karenin alanı S olsun. Şekilde gri+kırmızı alanların toplamı S/2 olur. ABC üçgeninin alanı da S/2 dir. O halde mavi alanların toplamı = kırmızı alanların toplamıdır. Toplamları büyük harfle gösterirsek: G+M = S/2 = G+K'dan M=K bulunur. Bayrakta mavi alan=kırmızı alan.

Üç Teğet Daire



A, B ve C noktalarından geçen teğetler (yeşil) ABC üçgeninin dış daresinin merkezinde kesişir. O halde önce ABC üçgeninde (kırmızı) kenar ortaların kesişme noktasını (ABC üçgeninin dış daresinin merkezini) bulalım; bu noktaya D diyelim. DA, DB ve DC'yi çizelim, bunlar aranan teğetlerdir (yeşil). A, B ve C noktalarından bu teğetlere çizilen dikmelerin kesişme noktaları mavi üçgeni verir; mavi üçgenin köşeleri aranan dairelerin merkezleridir. Rastgele üç A, B ve C noktası alarak bu çözümleri tavsiye ederiz; bir güzelliği hissi duyacaksınız.

Kördüğüm Aile

Bey arkadaşları baş harflerine alalım. Son cümleden anlaşılabilir odur ki beş arkadaşın hiçbirini oğlunu ve kızını aynı adama kız ve oğluya evlendirmemiştir, bir diğer deyişle beş arkadaş arasında oğlunun eşiyse kızının eşisi kardeş olan kimse yoktur. A'nın damadının babasının gelini = A'nın kızı. C'nin gelininin babasının damadı = C'nin oğlu. Demek ki C'nin kızı A'nın oğlusu ve C'nin kızı D'nin oğlusu evlidir.

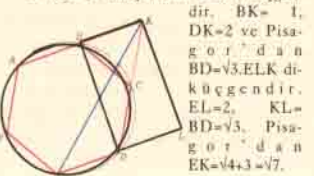
D'nin kızı kimin oğlusu evlendi? D'nin kızı C'nin veya A'nın oğlu ile evlenmiş olamaz. (C'nin kızı D'nin oğlusu evli, bu nedenle D'nin kızı C'nin oğlusu evlenmiş olamaz; bunu 1. paragrafa açıldık. A'nın oğlu B'nin kızıyla evli olduğundan D'nin kızıyla evlenmiş olamaz.) Diyelim ki D'nin kızı B'nin oğlusu evlendi. B'nin gelininin babasının gelini C'nin kızıdır. C'nin kızının kayınvaldesi Madam D'dir. D'nin damadının babasının damadı A'nın oğludur; A'nın oğlunun kayınvaldesiye Madam B'dir. Aynı kayınvaldeye sahip olmak şartı tutmadık; demek ki D'nin kızıyla B'nin oğlu evlenmedi.

Şimdi düşünelim ki D'nin kızıyla E'nin oğlu evlenmiştir. B'nin gelininin babasının gelini D'nin kızıdır ve D'nin damadının babasının damadı B'nin oğludur. Bu durumda D'nin kızıyla B'nin oğlunun kayınvaldesi aynı olup Madam E'dir.

Etienn'e'nin kızı Bernard'in oğlusu evlenmiştir.

Cephede Altıgen

B ile D'yi birleştirelim. BDK dik üçgenidir. BK=1, DK=2 ve Pisagor üçgeni olduğundan BD=√3. ELK dik üçgenidir. EL=2, KL=BD=√3. Pisagor üçgeni olduğundan EK=√4+3=√7.

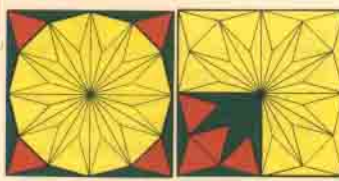


Dört Soylu

Louis'in yanında Albert ve sağında Albert'in karşısındaki Jan var. Sağında Serge olduğu için, Jan lorddur.

	Kral	Lord	Kont	Dük
Louis	Evet	-	-	-
Jan	-	Evet	-	-
Serge	-	-	-	Evet
Albert	-	-	-	-

Kral Problem: Onikigenin Alanı



Şekilde onikigenin (sarı) 12 eşkenar ve 24 ikizkenar üçgene ayrışımı görüyorsunuz. İkizkenar üçgenlerin tepesi açısı 150° ve taban açıları 15° (360/24 = 15°). Birin yarıçapı = 1 olduğundan karenin alanı = $2 \times 2 = 4$. Karenin köşelerinde iki yeşil ikizkenar ve bir kırmızı eşkenar üçgen görüyorsunuz (onikigenin köşelerinin dışarıya doğru birleştirilmesiyle). Karenin köşelerinde bunların toplamı = 8 ikiz kenar ve 4 eşkenar üçgen. Şimdi yandaki resme bakalım; alanı 4 olan karenin dörtte biri yeşil ikizkenar (alanı 1) olan bir kare (yeşil) görüyoruz; içinde 4 eşkenar ve 8 ikizkenar üçgen var. Demek ki büyük kare ile onikigen arasında kalan alan = sekiz ikizkenar + 4 eşkenar üçgen = büyük karenin alanının dörtte biri = 1. Büyük karenin alanı 4 idi, 1 çıkarırsak 3 kalır. Demek ki düzgün onikigenin alanı 3'dür. Birim dairenin alanı = $\pi r^2 = \pi \cdot 1^2 = 3.1416...$ Bulan Macar metamatikçisi Y. Kürşak (1864-1933).

Hungisi Kural Dışı

Sakalları dikkörtgen veya kare çerçeveye içindedir. Sakalsızlar oval çerçeveye içindedir. Alt sağ resim kural dışıdır, sakalsız olduğu halde oval değil köşeli çerçeveye içindedir.

Kuşçu

Birinci günden itibaren kafeslerdeki kuş dağılımı yazalım:

Gün	1	1	9	9	5										
2 -	8	8	4	4											
3 -	7	7	3	3	4										
4 -	6	6	2	2	3	5									
5 -	5	5	1	1	2	4	6								
6 -	4	4	-	-	1	3	5	7							
7 -	3	3	-	-	-	2	4	6	6						
8 -	2	2	-	-	-	-	1	3	5	5	6				
9 -	1	1	-	-	-	-	-	2	4	4	5	7			
10 -	-	-	-	-	-	-	-	-	1	3	3	4	6	7	
11 -	-	-	-	-	-	-	-	-	-	2	2	3	5	6	6

Görülüyor ki 11.gün kuşların kafeslerdeki dağılımı 4.günde olduğu gibi: 223566. Demek ki 4.günden itibaren kuşların dağılımı 7.günde birtek bir devir (periyot) göstermektedir. 1999 = $(7 \times 285) + 4$ 'dür. O halde, 1999. gün 6 kafes dolu, 1993 kafes boş olacak ve kuşlar kafeslerde 2, 2, 3, 5, 6 ve 6 olarak dağılacaktır.

Çin ve Japon Bilgisayarlar

Sorumuz şu olmalıdır: "Çin yapısı bilgisayarılar evet demek için mi yeşil ışık yakar?". Diyelim ki bu sorunuza karşı yeşil ışık yandı. Şimdi iki olasılık var: Yeşil = evet'tir veya yeşil = hayır'dır. Yeşil=evet olsun. Bu durumda bilgisayarın Çin mali olduğu bellidir. Yeşil=hayır ise bilgisayarın sorunuza "hayır" yanıtını vermiş demektir; bu durumda da bilgisayarın Çin mali olduğu açıktır. Benzer bir analiz (bunu size buraksaydık sorunuza kırmızı ışıkla yanıt veren bilgisayarın Japon mali olması gerektiğini gösterir).

Katil Kim

Eğer Robert de kardeşi Arthur gibi "evet"deseydi Holmes hangisinin katil olduğunu asla bulamazdı. Bulduğuna göre Robert "hayır" demişti. Böylece Arthur ve Robert'in ifadeleri uyumluydu; yani ya ikisi de doğruyu konuşmuştu veya ikisi de yalanlamıştı. Fakat daha baştan "en az biri yalancı" demiştik, o halde ikisi de doğrucu olamaz, ikisi de yalanlıdır. Bu nedenle katil Robert'dir.

İki Okurumuzun Büyük Başarısı

338 sayımızda (Ocak 1996) sunduğumuz İskender Yıldızında Sinay problemindeki teoremi çok değerli iki okurumuz ispatlayarak bize gönderdi. İnsanların matematiği yaparcasına sevmelerini herhalde bu gibi teoremler ve bu gibi ispatlar sağlar. Teorem ispatından, ispat teoreminden güçel. Bertrand Russell'in "matematikte güzel sanatlardakine benzer bir güzellik ve zarafet vardır" demesine hiç şaymıyorum; Jacobi'nin "matematiği insan aklını onurlandırmak için seçtim" demesine de. Teorem ispatını iki ayrı yoldan gerçekleştiren iki okurumuzun adları ve adresleri şunlar: Prof. Dr. Abiyev Asker Ali. Azerbaycan Bilimler Akademisi fizik-matematik profesörü ve halen Ankara'da Muradiye Erkek Fen Lisesi bilim danışmanı. I. Haluk Ergin, Yusuf Kamil Paşa Sk. 3/12 Ert Apt. Kadıköy, İstanbul.

Her iki ispatı bize gelişi sırasında göre yayımlayacağız. Bu sayımızda sayın Prof. Dr. Abiyev Asker Ali'nin ispatını gelecek sayımızda sayın I. Haluk Ergin'in ispatını vereceğiz. Birbirinden güzel bu iki çözüm insana yaşama zevkini aşıyor; onlarla birlikte matematiği ve onun yaratıcısı olan insan aklına, bir kez daha hayranlığın da ötesinde bir hisle, bir veed (esrime) ile bakıyoruz. Bu iki okurumuzda tekrar tekrar teşekkürü ederiz. Gelecekte yıldızlarımızın daha da parlayacağına eminiz.

Teorem: Kenar uzunlukları ardışık sayılar olan bir dörtgenin maksimum alanı, kenar uzunluklarının çarpımının kareköküne eşittir. Prof. Dr. Abiyev Asker Ali'nin ispatı: AC köşegeni ile ABCD dörtgenini iki üçgene ayralım. Dörtgenin alanı A, üçgenlerin alanı A₁ ve A₂ olsun. $A = A_1 + A_2 = \frac{1}{2} (bc \sin \beta + ad \sin \delta)$ (sintüs teoremi). Şimdi bu iki üçgenin her birine cosinüs teoremini uygulayalım:

$$AC^2 = b^2 + a^2 - 2ab \cos \beta = c^2 + d^2 - 2cd \cos \delta$$

$$\begin{cases} bc \sin \beta + ad \sin \delta = 2A \\ bc \cos \beta - ad \cos \delta = \frac{1}{2}(c^2 - b^2 - a^2 + d^2) \end{cases}$$

Her iki eşitliğin iki tarafının da karesini alıp taraf tarafa toplayalım:

$$b^2c^2 \sin^2 \beta + a^2d^2 \sin^2 \delta - 2abcd \sin \beta \sin \delta + b^2c^2 \cos^2 \beta + a^2d^2 \cos^2 \delta - 2abcd \cos \beta \cos \delta = 4A^2 - (c^2 - b^2 - a^2 + d^2)^2$$

$$4A^2 (b^2c^2 + a^2d^2) - 2abcd (\sin^2 \beta + \sin^2 \delta + \cos^2 \beta + \cos^2 \delta) = 4A^2 - (c^2 - b^2 - a^2 + d^2)^2$$

A'nın maksimumu değeri olması $\cos(\beta + \delta)$ nın (-1) olması mümkündür. Buradan A'nın maksimumu olabilmesi için $(\beta + \delta) = \pi$ olması gerektiği anlaşılır. Demek ki kenar uzunlukları ardışık sayılar olan bir dörtgenin alanının maksimumu olabilmesi için, o dörtgenin bir diğere ikisi yerleştirilebilmesi gerektirir, çünkü ancak böyle bir durumda $(\beta + \delta) = \pi$ olabilir.

$$a^2 = \frac{1}{2}(b^2 + c^2 - d^2) \quad d^2 = \frac{1}{2}(a^2 + c^2 - b^2) \quad \text{Eritme ve tarafları toplayalım} \quad (4ab - 2cd) \cos(\beta + \delta) = 2A^2 - \frac{1}{4}(b^2 + c^2 - d^2)(a^2 + c^2 - b^2)$$

$$A = \frac{1}{4}(b^2 + c^2 - d^2) \cos(\beta + \delta) + \frac{1}{4}(a^2 + c^2 - b^2) \cos(\beta + \delta) = ab \cos \frac{\beta + \delta}{2} \sin \frac{\beta + \delta}{2}$$

$$A = \frac{1}{2} ab \sin \frac{\beta + \delta}{2} \cos \frac{\beta + \delta}{2} = \frac{1}{4} ab \sin(\beta + \delta)$$

$$\cos(\beta + \delta) = \frac{1}{2} \cos(\beta + \delta) \quad \frac{1}{2} \cos(\beta + \delta) = 0 \quad \beta + \delta = \frac{\pi}{2} \quad \cos(\beta + \delta) = 0$$

$$A = \frac{1}{4} ab \sin \frac{\pi}{2} = \frac{1}{4} ab \quad \text{İki kare farkı formülünü uyguladık.}$$

$$\frac{1}{4}(b^2 + c^2 - d^2) \cos(\beta + \delta) = \frac{1}{4}(a^2 + c^2 - b^2) \cos(\beta + \delta) \quad \frac{1}{4}(b^2 + c^2 - d^2 - a^2 - c^2 + b^2) \cos(\beta + \delta) = 0$$

$$\frac{1}{4}(b^2 - a^2 - d^2 + b^2) \cos(\beta + \delta) = 0 \quad \frac{1}{4}(2b^2 - a^2 - d^2) \cos(\beta + \delta) = 0$$

$$2b^2 - a^2 - d^2 = 0 \quad a^2 + d^2 = 2b^2 \quad \text{Eritme ve tarafları toplayalım} \quad (4ab - 2cd) \cos(\beta + \delta) = 2A^2 - \frac{1}{4}(b^2 + c^2 - d^2)(a^2 + c^2 - b^2)$$

$$4ab \cos(\beta + \delta) \sin(\beta + \delta) = 2A^2 - \frac{1}{4}(b^2 + c^2 - d^2)(a^2 + c^2 - b^2) \quad \frac{1}{2} ab \sin(2(\beta + \delta)) = 2A^2 - \frac{1}{4}(b^2 + c^2 - d^2)(a^2 + c^2 - b^2)$$

$$ab \sin(2(\beta + \delta)) = 4A^2 - \frac{1}{2}(b^2 + c^2 - d^2)(a^2 + c^2 - b^2) \quad \text{Tüm yazılanları dikkate alarak:}$$

$$A = \frac{1}{4} ab \sin(\beta + \delta) \quad \text{Şimdi } b = a+1, c = a+2, d = a+3 \text{ kabul edelim.}$$

$$u = (a+d) = a + (a+3) = 2a+3, 2a-3 = 0, u = (b+d) = (a+1) + (a+3) = 2a+3, 2a-3 = 0, u = (c+d) = (a+2) + (a+3) = 2a+3, 2a-3 = 0, A = \frac{1}{4} ab \sin(\beta + \delta) = \frac{1}{4} (a+1)(a+2) \sin(\beta + \delta)$$

$$A = \frac{1}{4} (a+1)(a+2) \sin(\beta + \delta) \quad \text{Teoremi ispatlanmış olduk.}$$