ASAL SAYILAR 3

İKİZ ASALLAR KONUSU VE RIEMANN HİPOTEZİ

Kopamadığımız asallar serüveninin son halkasına gelmiş olsak da asalların öyküsü kolay kolay sona erecek gibi değil. Bilinmeyenlerle dolu bu kümenin en az kendisi kadar ilginç ve her biri birer sır küpü olan altkümelerin ortaya çıkması, asal sayıları soru üretme konusunda oldukça verimli kılıyor. Daha güzeli ve ilginci çözülemeyen sorular bir yerden sonra kimi matematikçiler tarafından matematiğin şimdiye kadar çözülemeyen en büyük problemi olarak nitelendirilen "Riemann Hipotezi" engeline takılıyor. Engel diyoruz çünkü bu ifade henüz teorem olmadı yani kanıtlanmadı. İspatlanmamış bir ifadeyi kullanarak yola devam etmek ise tırmandığımız kulenin heran devrilebileceği riskini göze almaktan başka bir şey değildir.

İkiz Asallar Sanısı

Asal sayı kavramının varlığını kabul ettikten sonra "bu sayılardan kaç tane var" sorusunu gündeme getiren insanoğlunun aynı zamanda kayda değer bir şekilde uğraştığı ilk asal problemi de budur. "Kaç tane asal vardır" tartışması Öklid'in ispatını verdiği "sonsuz tane asal vardır" ifadesi ile bir son buldu. Daha sonra ortaya çıkan pek çok yeni altküme için de eleman sayısı önemli bir merak konusu oldu. Bugün hala sonsuz tane elemanı olduğu kesin olarak ispatlanmayan (ama öyle olduğu tahmin edilen) bir diğer küme de farkı 2 olan asal sayı çiftlerinin oluşturduğu ikiz asallar kümesi. İspatın hala tamamlanamaması nedeniyle sayı kuramının gündeminden uzun zamandır düşmeyen ikiz asalların ilk birkaç örneği (3, 5), (5, 7), (11, 13), (17, 19), (29, 31), and (41, 43).

Diğer alt kümeler

Aralarındaki fark sabit bir sayı olan asallar kümelerini düşünürsek oldukça geniş bir alt küme ailesi edinmiş oluruz. Örneğin farkın 4 olduğu çiftler:

{(3,7),(7,11),(19,23)...}

Ya da farkı 6 olanlar:

{(5,11),(7,13),(11,17),...}

Bu kümelerin her biri için sonsuz mudur değil midir tartışmasına girince de asalların soru üretme konusunda nasıl da verimli davrandığı açıkça görülebilir. Peki aralarındaki fark 7 olan asal sayı çiftlerini listelesek nasıl bir küme elde ederiz? 2 dışında her asal bir tek sayıdır ve iki tek sayının farkı bize daima bir çift sayı verecektir. Bu nedenle sadece, farkı çift sayı (yani $2n$, $n \in Z$) olan asal çiftlerinin oluşturduğu kümelerle uğraşmak kayda değer sorular ve sonuçlar verecektir. n=1 iken fark 2 oluyor ve ikiz asallar kümesi elde ediliyor. Peki n=2 için durum nedir?

n=2: Kuzen asallar

Sayılar kuramında adlandırma yapılırken genelde gerçek hayatla tanımlar arasında analoji kurulması göze çarpıyor: İkiz asallar, dost sayılar, aşık sayılar, mükemmel sayılar gibi... Aralarındaki fark 4 olan asal sayıları da kuzen asallar olarak tanımlamayı uygun görmüş matematikçiler. Ne de olsa bu çiftler arasında birinci dereceden değil de ikinci derecen bir yakınlık bağı var. Ama isimlere aldanıp tanımları akıldan çıkarmamakta fayda var. Örneğin 3 ve 5 ikiz asallar 3 ve 7 kuzen asallar. Buradan yola çıkıp da (3'ün ikizi olan) 5, 7 ile kuzen olur diyemeyiz çünkü tanım gereği onlar da ikiz asallar.

1849 da Alphonse de Polignac aralarındaki fark 2n olan asal çiftlerinin oluşturduğu kümelerin hepsinin sonsuz tane eleman içerdiği sanısını ortaya atarak problemi genel bir boyuta taşıdı.

Birkaç Değişik Sonuç

Sonsuz toplamlar olarak bilinen serileri yakınsak ve ıraksak olarak iki kategoride değerlendiriyoruz. Örneğin: n, 0'dan farklı doğal sayılar olmak üzere

$$\sum_{n \in N^+} \frac{1}{n}$$

serisi ıraksak bir seridir; yani sayıların toplamı belli bir değere yaklaşmamaktadır. Öte yandan

$$\sum_{n \in N^+} \frac{1}{n^2}$$

serisi değeri $\pi^2/6$'ya yaklaşan yakınsak bir seridir.

Euler 1737'de n değerlerini daraltıp biraz daha kısıtlı bir seri olan (p asal olmak üzere) 1/p değerlerinin sonsuz toplamını incelemiş ve

$$\sum_{p \text{ asal}} \frac{1}{p}$$

serisinin yine ıraksak bir seri olduğunu ispatlamıştır.

İkiz asalların dağılımları gizemini korurken Viggo Brun'un 1919'da ispatladığı teorem şuydu: p ve p+2 ikiz asal çifti olmak üzere bu sayıların terslerinin toplamı olan

$$\sum \frac{1}{p} + \frac{1}{p+2}$$

serisi yakınsaktır ve değeri yaklaşık olarak 1.902160583104 olan Brun sabitine yakınsar. Bu sonuçla karşılaşınca akla ilk gelen ikizlerin asallar arasında seyrek bir dağılım gösterdiği oluyor.

İkizlerin dağılımı

Asal sayılar dizisinin ilk yazısında tanıştırdığımız asal sayı teoremine göre 1'den x'e kadar olan asal sayı miktarı yaklaşık olarak $\frac{x}{\ln x}$ kadardır . Buradan hareketle x civarındaki iki tane asal sayının farkı ortalama olarak lnx kadar olduğu söylenebilir.

İşte ikiz asallar konusunda araştırması yapılan temel konu bu farkın 2 olduğu durumların dağılımının biçimidir. Bu sayıların sonsuza uzanan bir dizi oluşturup oluşturamayacağı konunun genelde yüzeye yansıtılan kısmıdır.

Ardışık iki asalın farkı

Bu durumda iki asal arasındaki farkın ln x'den daha küçük olabileceği sonsuz dizilerin durumlarını sorgulamak gerekiyor. 1940'da Paul Erdös'ün c, 1'den küçük bir sabit olmak üzere $p_{n+1} - p_n < c \cdot \ln p_n$ ifadesini sağlayan sonsuz tane asal olduğunu ispatlanmasıyla daha iyi bir sonuç elde edilmiş oluyordu. Gerçi c<1 den daha iyi olan c<2/3 için bu ispat 1926'da Hardy ve Littlewood tarafından yapılmıştı ama ispat henüz doğruluğu kanıtlanmamış Genelleştirilmiş Riemann Hipotezini kabul ediyordu. Erdös'le bağımsız olarak ispat edilen bu ifade daha sonra 1986'da Maier'le c < 0.25 halini aldı.

Türkiye'den Bir Yanıt!

2003 yılında probleme bir iyileştirme de Bogaziçi Üniversitesinden geldi. Matematik Bölümü öğretim üyelerinde Cem Yalçın Yıldırım birlikte çalıştığı San Jose Devlet Üniversitesi öğretim üyelerinden Dan Goldston'la

$$p_{n+1} - p_n < (\ln p_n)^{\frac{8}{9}}$$

eşitsizliğini sağlayan sonsuz asal olduğunu ispatlayarak bu farkların daha da küçültebileceğini göstermiş oldular. Küçültmenin katsayı olarak değil de kuvvet olarak yapıldığı bir sonuç olduğu için bu çalışma dünya çapında büyük ses getirdi.

Bugün bilinen bir diğer sonuç da 1966'da Chen Jingrun tarafından kaydedilen p asal ise p+2'nin ya asal ya da yarı asal (iki asalın çarpımı) olduğu sonsuz tane asal sayının bulunabilineceğidir.

Hardy-Littlewood Sanısı

Asallar konusunda diğer bir cevabı aranan sanı ise İngiliz matematikçiler Hardy ve Littlewood tarafından ortaya atıldı. Bu ifade asal sayı teoreminin asallar için üstlendiği görevi taşıyor, yani dağılımları hakkında bir fikir öne sürüyordu.

$$\pi_2(x) \sim 2C_2 \int_2^x \frac{dt}{(\ln t)^2}$$

buradaki, $\pi_2(x)$, x'den küçük ikiz asalları sayan fonksiyon; C_2 ise değeri yaklaşık 0,660161181 olan bir sabit.

Son gelişme olarak Mayıs 2004'de Richard Arenstorf ismili bir matematikçi asalların sonsuz olduğuna dair bir ispat verdi ama bu ispatta ciddi bir problem çıkınca matematikçi ispatını geri çekti.

1 Miyon Dolarlık Soru

Asal sayıların dağılımı Alman matematikçi Bernhard Riemann'ın 1859'da öne sürdüğü, hala teorem ünvanını alamamış Riemann Hipotezi ile yakından ilgili. Asallar, Riemann Zeta Fonksiyonu olarak bilinen $\zeta(s)$ fonksiyonunun davranışına bağlılık gösteriyor. 1900 yılında Meşhur Paris Kongresinde David Hilbert'in cevaplanmayı bekleyen matematik soruları listesinde bulunan Riemann Hipotezi geçen yüzyıl boyu kanıtlanamayınca, 2000 yılında Clay Matematik Enstitüsü tarafından ilan edilen 1 milyon dolarlık ödüllü 7 sorudan biri oldu. Gerçekten cezbedici olan bu ödülü haketmek için cevaplamanız gereken soru şu;

Riemann Hipotezi, Riemann zeta fonksiyonunun sıfırlarının dağılımı hakkında bir kestirimde bulunur; Buna göre $\zeta(s) = 1 + 1/2^s + 1/3^s + 1/4^s + ... = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$, $s \neq 1$ (fonksiyon s'in 1 değeri dışındaki her kompleks sayı için tanımlıdır.) Şeklinde olan Riemann Zeta Fonksiyonunun bütün sıfırlarının yani $\zeta(s)=0$'ı sağlayan s değerlerinin reel kısmı 1/2'dir. İlk 1.500.000.000 çözüm için doğruluğu ispatlanan ve pek çok matematikçinin doğru olduğuna inandığı bu sonuç kanıtlandığında asal sayılar konusunda pek çok ilerlemeler kaydedilecek.

Cahit Arf'ın Çalışması

Hocamız Cahit Arf da 1980 yılından sonra çok geniş kapsamlı bir problem üzerinde çalışıyordu. Bu problem çözüldüğü takdirde yan ürün olarak Riemann Hipotezi de çözülmüş olacaktı. ODTÜ matematik bölümü profesörlerinden Mehbare Bilhan'ın aktardığı kadarıyla Cahit Hocamızın sonlu cisim üzerinde inşa ettiği ve "Arf Zeta Fonksiyonu" olarak adlandırılan bir fonksiyon Riemann Hipotezini sağlamakta idi, yani sıfırlarının reel kısımları 1/2 oluyordu. Ancak bu görkemli proje tamamlanamadı.

Kestirimler Yumağı

Burada asal sayılar bünyesinde bulunan ve cevaplanmamış pek çok soruyu tanıttık. Ama daha sözünü etmeye fırsatı bulamadığımız pekçok kestirim de var. Örneğin n^2+1 formunda bulunan sonsuz tane asal vardır, n^2 and $(n+1)^2$ arasında daima bir asal bulunur ya da n!+1 (ve ya n!-1) formunda sonsuz asal bulunabilir gibi... Açıkça görülüyor ki asal sayılar kuramında sorular cevaplardan açık farkla daha hızlı bir biçimde üretiliyor. Şimdi matematik dünyası Riemann Hipotezi'nin kanıtlanacağını zamanı ve bu ispatın asallar konusuna getireceği yenilikleri merakla bekliyor.

Nilüfer Karadağ
karadagnilufer@yahoo.com

Kaynaklar
http://www.biltek.tubitak.gov.tr/dergi/ozel/arf/bilhan.html
http://aimath.org/goldston_tech/