OLİMPİYAT SORULARININ ÇÖZÜMLERİ

Prof.Dr. Ali Osman AŞAR

1987/1'in Çözümü:

1. Çözüm (Batı Almanya tarafından verilmiştir).

$S = \{1, 2, \ldots, n\}$ olsun. S'nin bütün permütasyonlarının sayısı $n!$ dir. Şimdi S nin her f permütasyonuna karşılık gelen bir $(e_1, e_2, \ldots, e_n)$ "n-vektörü" şu şekilde tanımlansın: Eğer $i \in S$ f nin bir sabit noktası ise $e_i = 1$ ve i f nin bir sabit noktası değilse $e_i = 0$ olsun ($n = 4$ için (124) permütasyonuna karşılık gelen 4 - vektörü (0,0,1,0) olur). O zaman k adet "1" bileşeni olan n-vektörlerinin sayısı $P_n(k)$ dır. Böylece bütün n-vektörlerinde bulunan "1"lerin sayısı

$$\sum_{k=0}^{n} kP_n(k) \tag{1}$$

dir. Bu sayma işlemi şu şekilde yapılabilir. Her $1 \leqslant i \leqslant n$ için i'inci bileşeni $e_i = 1$ olan bütün vektörlerin sayısı i yi sabit bırakan bütün permütasyonların sayısıdır.

Bu sayı $S \setminus \{i\}$ kümesinin bütün permütasyonlarının sayısıdır ve $(n-1)!$ dir. Buradan bütün "1"lerin sayısı

$$n(n-1)! = n! \tag{2}$$

bulunur. Böylece (1) ve (2) de istenilen eşitlik elde edilmiş olur.

2. Çözüm

S nin tam olarak k noktasını sabit bırakan permütasyonlarının sayısı

$$P_n(k) = \binom{n}{k} P_{n-k}(0) \tag{3}$$

olarak yazılabilir. Diğer taraftan her $1 \leqslant s \leqslant n$ için

$$P_s(0) = s! - \binom{s}{1}(s-1)! + \ldots + (-1)^s$$

$$= \sum_{i=0}^{s} (-1)^i \binom{s}{i} (s-i)!$$

$$= \sum_{i=0}^{s} (-1)^i \frac{s!}{i!}$$

olduğu bilinmektedir. Buradan $s = n - k$ için

$$P_{n-k}(0) = \sum_{i=0}^{n-k} (-1)^i \frac{(n-k)!}{i!} \tag{4}$$

elde edilir. Şimdi (3) ve (4) değerlerinden

$$\sum_{k=0}^{n} kP_n(k) = \sum_{k=0}^{n}\sum_{i=0}^{n-k} (-1)^i k\binom{n}{k} \frac{(n-k)!}{i!}$$

$$= n!\left(\sum_{k=1}^{n}\sum_{i=0}^{n-k} (-1)^i \frac{1}{(k-1)!\,i!}\right)$$

elde edilir. Burada n üzerine indüksiyonla parantez içinin 1 olduğu gösterilebilir. $n = 1$ için iddia doğrudur. n için doğruluğunu kabul edip $n+1$ için doğruluğunu gösterelim.

$$\sum_{k=1}^{n+1}\left(\sum_{i=0}^{n+1-k} (-1)^i \frac{1}{(k-1)!\,i!}\right)$$

$$= \sum_{k=1}^{n}\left(\sum_{i=0}^{n+1-k} (-1)^i \frac{1}{(k-1)!\,i!}\right) + \frac{1}{n!}$$

$$= \sum_{k=1}^{n}\left(\sum_{i=0}^{n-k} (-1)^i \frac{1}{(k-1)!\,i!} + (-1)^{n+1-k}\frac{1}{(k-1)!\,(n+1-k)!}\right) + \frac{1}{n!}$$

$$= 1 + \frac{1}{n!} + \sum_{k=1}^{n} (-1)^{n+1-k} \frac{1}{(k-1)!\,(n+1-k)!}$$

$$= 1 + \frac{1}{n!} + \sum_{j=0}^{n-1} (-1)^{n-j} \frac{1}{j!\,(n-j)!}$$

$$= 1 + \frac{1}{n!} + \frac{1}{n!} \sum_{j=0}^{n-1} (-1)^{n-j} \binom{n}{j}$$

$$= 1 + \frac{1}{n!} \sum_{j=0}^{n} (-1)^{n-j} \binom{n}{j}$$

olduğundan

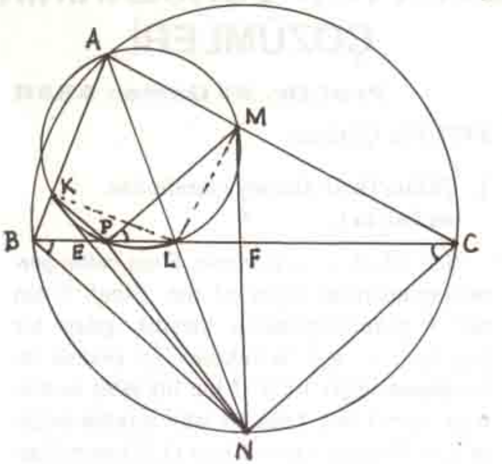
$$\sum_{j=0}^{n} (-1)^{n-j} \binom{n}{j} = 0$$

olduğunu göstermek yeter. Fakat

$\sum_{j=0}^{n} (-1)^j \binom{n}{j} = 0$ olduğundan yukarıdaki eşitlik de doğrudur.

1987/2'nin çözümü:

(Sovyeler Birliği tarafından verilmiştir)



Yandaki şekilde AKLM dörtgeninin çevrel çemberinin BC kenarını kestiği ikinci nokta P olsun. Bir çember üzerinde aynı yayı gören iki çevre açı eşit olduğundan $\angle BCN = \angle BAN$ ve benzer şekilde $\angle MAL = \angle MPL$ dir. Buradan $\angle MPL = \angle BCN$ bulunur. Böylece $PM \parallel NC$ dir. Benzer şekilde $KP \parallel BN$ dir. Şimdi BKPN ve NPMC dörtgenleri yamuk olduğundan,

$S_{BKE} = S_{EPN}$ ve $S_{NPF} = S_{FMC}$ dir.

Bundan dolayı

$S_{ABC} = S_{AKNM}$ dir.

1987/3'ün Çözümü:

(Batı Almanya tarafından verilmiştir)

$a_1, a_2, \ldots, a_n$ ve $b_1, b_2, \ldots, b_n$ gerçel veya karmaşık sayılar olmak üzere

$$\left(\sum_{i=1}^{n} a_i b_i\right)^2 \leqslant \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n} b_i^2\right)$$

eşitsizliğinde Cauchy Eşitsizliği denir. $0 \leqslant e_i \leqslant k-1$ ve $e_1, e_2, \ldots, e_n$'nin hepsi birden sıfır olmamak üzere $e_1x_1 + e_2x_2 + \ldots + e_nx_n$ ifadesine Canchy Eşitsizliği uygulanırsa, $x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2 = 1$ olduğundan

$$\left|\sum_{n=1}^{n} e_i x_i\right| \leqslant \left(\sqrt{\sum_{i=1}^{n} e_i^2}\right)\left(\sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}\right)$$
$$= \sqrt{\sum_{i=1}^{n} e_i^2}$$
$$\leqslant (k-1)\sqrt{n}$$

elde edilir. Yukarıdaki şekilde seçilen $(e_1, e_2, \ldots e_n)$ n - vektörlerinin sayısı k^n-1 dir. Buradan $|e_i| \leqslant k-1$ ve her $e_i \geqslant 0$

veya her $e_i \leqslant 0$ olmak üzere

$\sum_{i=1}^{n} e_i x_i \in [0, (k-1)\sqrt{n}]$ şartını sağlayan $(e_1\, e_2, \ldots, e_n)$ n - vektörlerinin sayısı $\geqslant k^n$-1 dir.

$[0, (k-1)\sqrt{n}]$ kapalı aralığı, uzunluğu $\dfrac{(k-1)\sqrt{n}}{k^n-1}$ olan $(k^n - 1)$ kapalı altaralığın birleşimi olduğundan ya $\left[0, \dfrac{(k-1)\sqrt{n}}{k^n-1}\right]$ aralığına ait olan bir $\sum_{i=1}^{n} e_i x_i$ toplamı vardır ve bu durumda işimiz tamamdır veya en az bir $1 \leqslant j \leqslant n$ için $e_j \neq e'_j$ olan ve aynı kapalı altaralığın içine düşen

$$\sum_{i=1}^{n} e_i x_i \,,\; \sum_{i=1}^{n} e'_i x_i$$

toplamları vardır. O zaman

$$\left|\sum_{i=1}^{n} e_i x_i - \sum_{i=1}^{n} e'_i x_i\right| = \left|\sum_{i=1}^{n} (e_i - e'_i)\, x_i\right|$$
$$\leqslant \frac{(k-1)\sqrt{n}}{k^n-1}$$

olduğundan $a_i = e_i - e'_i$ konursa $|a_i| \leqslant k-1$, $(a_1, a_2, \ldots, a_n) \neq (0, 0, \ldots, 0)$ ve

$$\left|\sum_{i=1}^{n} a_i x_i\right| \leqslant \frac{(k-1)\sqrt{n}}{k^n-1} \quad \text{dir.}$$

Çözümlerin devamı gelecek sayıda