

KÂSE, KULÂH VE MANTIK

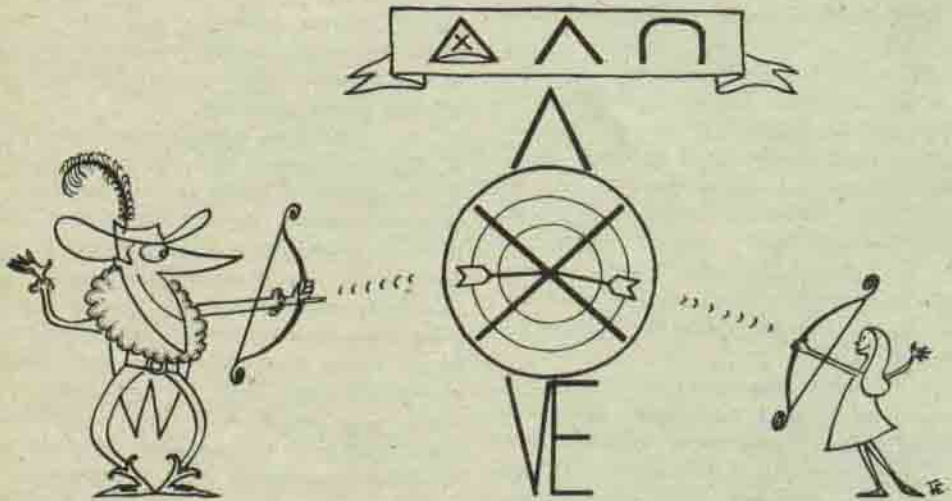
Dr. Herman AMATO
Çizgiler: Ferruh DOĞAN

Aklı maymunlar: (Ümit Yaşar Oğuzcan'ın kullukları çınlasın, bu başlığı onun kitabından aktardım). Bilim adamları uğraşmışlar uğraşmışlar, sonunda aklımda kaldığına göre bir maymuna bir mi? iki mi? kelime öğretmişler. Bu kelimelerden biri yanılmıyorsam «cup» (türkçe «Kap» okunur) tir.

Sahneyi değiştiriyoruz, bir modern matematik dersine giriyoruz. Öğretmen tersine bir V (Δ) yapıyor «Kep» diyor, doğru dürüst bir V yapıyor «kap» diyor. Kep-kap, kap-kep bunlardan hangisi doğru V yi, hangisi tersine V yi temsil ediyor? Bir satır öncesini okumadan keşfetmeye çalışın. Bu adam eski yunanca mı konuşuyor dersiniz? Hiç de değil. İngilizcedeki «cap» yani erlerin giydiği kep istel Tersine bir V yi andırıyor mu? Ben türkçe olarak buna kulâh diyecektim. «Cup» dediği ise İngilizce bardak, kâse anlamına gelir. Biz de kâseye bazan kap deriz «kap kaçak» der-

ken. Kep ve kap kelimelerine türkçe anladığımız manalarını verseydik tersine V (Δ) nin kep, doğru dürüst V nin kap olduğunu hemen anlıyacaktır.

İş bununla bitmiyor, geçen yazımızda tersine U (\cap) nun — isterseniz buna takke diyelim — VE anlamına geldiğini, doğru dürüst U nun — isterseniz buna kâse diyelim — VEYA anlamına geldiğini açıklamıştık. Bu kelimeleri karıştırmakla oldukça sağlam bir mantığa varacağımızı anlatmaya çalışmıştık. VE çarpma anlamına geliyordu. İki olay birlikte meydana geliyorsa bunlara alt ihtimaller çarpılıyordu (Çarpılanlar oranı oldukları için çarpma ihtimali büyültmez, genellikle küçültür. İki olayın aynı anda meydana gelmesi daha seyrek. Şapkayı kafanıza geçirdiğiniz şekilde elinizde tutarsanız içindeki şeyler dökülür.) Bir VEYA diğer olayın ihtimalini seçme hakkımız olan hallerde ihtimaller toplanıyor-



du. VEYA toplama anlamına geliyordu (İhtimaller toplanınca büyürler. Seçim imkânlarımızı arttırmakla başarı oranımızı büyütürüz. Bir kâse içerisinde birçok şeyler toplanabilir). Şimdi U lar ve tersine U lar sıvırlıyor, keskinleşiyor. Ters ve doğru V lere dönüşüyorlar ve mantık alanına giriyoruz. Klasik mantıkta ancak kat' hükümler söz konusudur. Bir hüküm ya tamamen yanlıştır veya tamamen doğrudur. Ne tamamen doğru, ne de tamamen yanlış olmıyan hükümler (önermeler) klâsik mantığı ilgilendirmez. Bu yüzdendir ki bu mantığın kullanılış alanı oldukça daralmıştır. Biz yazılarımızda çok daha geniş bir kullanma alanı bulunan bir mantık tarzından bahsedeceğimiz, bu da ihtimaller mantığıdır.

Mantıkta kat'iyet 1 (bir) ile gösterilir. İki zar atılınca 36 karşılaşma şekli olduğunu ve bunları önceden hesaplayabileceğimizi söylemiştik (11, 12, 13, 14, 15, 16; 21, 22, 23, 24, 25, 26; 31, 32, 33, 34, 35, 36; 41, 42, 43, 44, 45, 46; 51, 52, 53, 54, 55, 56; 61, 62, 63, 64, 65, 66.). Bunların içinde 6-6 (veya 66) hâli bir defa karşımıza çıkıyordu ve bunu tutturma ihtimali $1/36$ idi. Eğer ne gelirse gelsin ben kazanacağım deseydim (bu, elimdeki tabancanın ustalığıdır), o zaman karşıma çıkma ihtimali $1/36$ olan 36 halden hangisi gelirse gelsin ben kazanacaktım. Seçim imkânlarımız genişlemiş olduğundan VEYA hâli sözcüğüdür. O halde herbiri $1/36$ ihtimalle karşımıza çıkan 36 hâlin ihtimallerini toplarsak $36/36 = 1$ (bir), elde ederiz. Gerçekten iki zar atarsam bu 36 halden herhangi birinin karşıma çıkacağı kat'idir. Çünkü bütün imkânları saydık ve geriye başka bir imkân kalmadı. Şayet tabanca karşımdaki şahısta bulunursa benim kazanma şansım bu 36 hâlin dışında olacak (tıpkı iki zarla 13 toplamı elde etmekte olduğu gibi, zarlar 6 dan büyük sayı gösteremediklerinden iki zarla elde edilebilen en büyük toplam 12 dir) kazanma şansım 0 «sıfır» ile gösterilecek ve bu sayı tam emniyetsizliği anlatacaktı. Böylece klâsik mantık alanına girmiş olacaktık. Klasik mantıkta 1 (bir) tam doğru, 0 (sıfır) tam yanlış hükümleri gösterir. 1 (bir) ile 0 (sıfır)ı çarparsak 0 (sıfır) elde ederiz. 1 (bir) ile 1 (bir) çarparsak 1 (bir) elde ederiz. Yani mantıkta basit iki hüküm yan-

yana gelir ve bunlar birbirine VE kelimesiyle bağlanırsa bileşik önermenin doğru olabilmesi için bu iki hükümün de doğru olması lazımdır. Eğer iki hüküm VEYA kelimesi ile birleşirse, bunlardan birinin doğru olması bileşik hükümün doğru olması için yeter ($1 + 0 = 1$). VEYA nın + anlamına gelebildiğini söylemiştik. Eğer VEYA ile bağlanan hükümlerin ikisi doğru ise bileşik hüküm, birleşebilen hallerde (hem siyah saçlı hem de mavi gözlü olmak gibi) doğru ve birleşemiyen hallerde (ölmek ile hayatta olmak gibi) yanlış olacaktır.

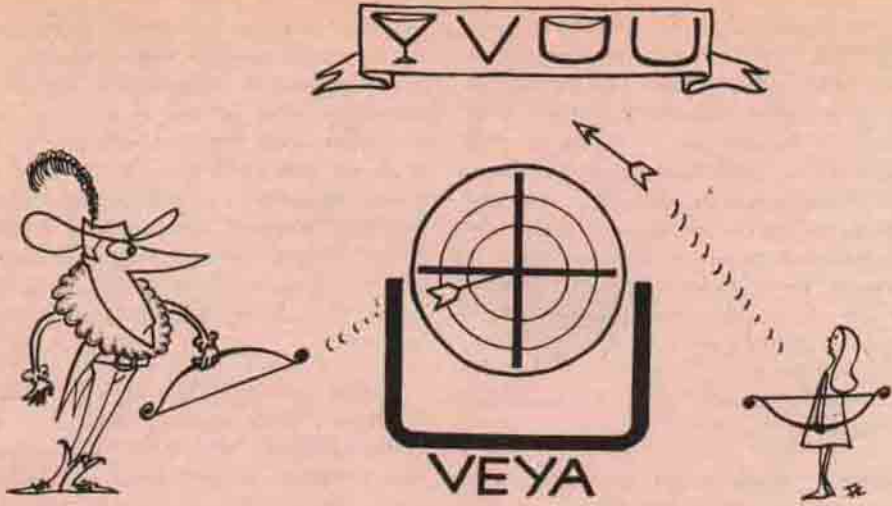
Geçen yazımızdan hatırlıyacağınız üzere (ne hatırlaması! Dönüp bakınız!) VEYA halini hesaplarken birleşebilen hallerde, iki defa saymamak için, toplamdan müşterek kısmı düşürüldük. Bu kısmın ihtimali VE ile ilgili olduğu için, ihtimaller çarpılarak bulunurdu. Birleşebilen hallerde iki hüküm doğru ise bunların toplamı ($1 + 1$), 2 eder. Müşterek kısım ise çarpılarak bulunduğundan (1X1), 1 (bir) eder. Toplamdan, yani 2 den 1'i çıkarmakla, 1 buluruz ki bu da kat'iyeti gösterir. Halbuki birleşemiyen hallerde 1 düşürmeyiz, çünkü bu hallerin müşterek bir alanı yoktur. Sonuç 2 olur ki bu da başta yanlışlığımızı gösterir. Yani, VEYA ile bağlanan iki hüküm doğru ise, birleşemiyen hallerde, bileşim hüküm yanlış olur. Bunlar sizi çok mu ilgilendirdi? O halde Mıammer Gürdal'ın «Sembolik mantık» konulu konferansını okuyabilirsiniz (MODERN MATEMATİK KONFERANSI, editör: Okan Gürel, Türkiye Bilimsel ve Teknik Araştırma Kurumu yayınları, 1968). Benim bir daha bu konuya dönme niyetim yok. Başka düşüncelerim var: «Acaba cup (kap) kelimesini öğrenen maymununun mantıkta VEYA anlamına geldiğini ve VEYA halinde hükümler ile ilgili değerleri toplamamız gerektiğini biliyor muydu? Eğer biliyordu ise çok önemli birşey öğrenmiş demektir. Ve biz insanlar — ki çoğumuz bunu bilmez — bu maymunu içtenlikle tebrik atmeliyiz».

VE ile VEYA'yı ilgilendiren formüllerin ihtimaller hesaplarına nasıl uygulanabileceğine örnek olarak geçen yazıda verdiğimiz problemlerin çözümlerini gösterabiliriz.

GEÇEN SAYIDA VERİLEN PROBLEMLER VE ÇÖZÜMLERİ :

- 1) Üç zarla atışta a) 1 defa 6 elde etmek, b) 2 defa 6 elde etmek, c) 3 defa 6 elde etmek,

Şekil 1. İki olay birlikte meydana gelirse durumu VE kelimesi ile anlatırız. Bu hallerde olayların ihtimallerini çarparsınız. Matematik VE yerine kullanılan sembolleri külahı düşünerek aklınızda tutabilirsiniz.



Şekil 2. Olaylardan birinin VEYA öbürünün ortaya çıkması gartımızı doldur-
maya yetmiyorsa, durumu VEYA kelime-
si ile anlatırız. Bu hallerde olayların ihtimallerini topluyacağımız. Kâse veya
kadehi düşünmenin matematikte kullanı-
lan VEYA ile ilgili sembolleri hatırlama-
mız için yeter.

gösterdiğinden burada VE ile ifade edilen çarpma kaidesinden istifade edeceğiz. Durumu yeşil «6» VE kırmızı «6 dışı» VE sarı «6 dışı» kelimeleri ile (gü zeli olmasa bile) ifade edebiliriz. O halde 6 durumu bir defa ve «6 dışı» iki defa karşımıza çıktığından, «6» durumuna alt 1/6 ihtimalini 1 defa, 6 dışı durumuna alt 5/6 ihtimallerini 2 defa yazıp bu ihtimalleri çarpmalıyız. Sonuç $1/6 \times 5/6 \times 5/6 = 25/216$ olur.

Bu yeşil zarla «6» ve diğer zarlarla «6 dışı» elde etmenin ihtimalidir. Halbuki tek 6 başka şekillerde de elde edilebilir: Kırmızı zarın «6»yı diğer iki zarın «6» dışını göstermesi ile VEYA sarı zarın «6» yı ve geriye kalan iki zarın «6 dışı»nı göstermesiyle. Bu üç durumun ihtimalleri eşittir. Aynı neticeyi çeşitli seçimlerle elde ediyoruz. Seçim imkânlarımız artmıştır. VEYA durumu sözkonusudur. Yani toplama aklımıza gelmeli. Burada 3 ihtimal de $25/216$ olduğundan bu sayıyı 3 defa yazıp toplayacak yerde 3 ile çarpsak aynı neticeyi elde ederiz, sonuç $75/216$ olur.

b) 3 zarla 2 defa 6 elde etme ihtimali aynı şekilde hesaplanır: Yalnız iki defa 6 gelmiş olduğundan bunun ihtimali $1/6$ yı iki defa, ve «6 dışı» hali tek defa karşımıza çıktığından bunun ihtimali $5/6$ yı bir defa yazarak çarpmalıyız. Sonuç $1/6 \times 1/6 \times 5/6 = 5/216$ olur.

Bu durum da 3 farklı şekilde elde edilebildiğinden (sarı, yeşil ve kırmızı zarların ayrı ayrı

d) hiç 6 elde etmemek ihtimallerini hesaplayınız. Ve, VEYA kelimeleri altında topladığımız formüllerin daha basit olayların ihtimalleri yardımıyla, bunların birleşmesinden doğan daha karışık durumların birleşik ihtimallerini hesaplamaya yardım edeceğini söylemiştik. O halde ilk aklımıza şu soru gelmeli: Burada basit dediğimiz ihtimaller hangileridir?

Tek zarla atışta ya 6, ya da 6 dışında bir sayı gelir. O halde burada basit dediğimiz ihtimaller: 1) tek zarla atışta 6 elde etme ihtimali 6 yüzden bir tanesi «6» yı gösterdiğinden bu ihtimal $1/6$ dir. 2) Tek zarla «6 dışında» bir yüz elde etme ihtimali, zarın «6» dışındaki 5 yüzü bu şartı gerçekleştirdiğinden $5/6$ dir.

Bu ihtimaller yardımıyla 3 zarla çıkacak durumları hesaplamaya çalışalım. Daha iyi canlandırılmak için sarı, yeşil ve kırmızı renkli üç zar tasarlayalım.

a) Bir defa 6 elde etmek için, örneğin yeşil zarla «6», kırmızı zarla «6 dışı», sarı zarla «6 dışı» gibi bir durumla karşılaşmalıyız. Bu üç zar aynı atışta, yani aynı zamanda bu durumları

deneyleerde tek başlarına 6 dışını göstermeleriyle) bu sonucu da VEYA hali söz konusu olduğundan 3 defa yazıp toplamalı veya 3 ile çarpmalıyız sonuç 15/216 olur.

c) 3 defa 6 bir tek yoldan elde edilir, her üç zarın 6 yı göstermesiyle. O halde üç defa «6» gelme ihtimali 1/6 yı yazıp bunları çarpmalıyız. Sonuç: $1/6 \times 1/6 \times 1/6 = 1/216$ olur.

d) 3 defa «6 dışı» gene tek yoldan elde edilir, her 3 zarın «6 dışını» göstermesi ile sonuç: $5/6 \times 5/6 \times 5/6 = 125/216$ olur.

Bütün sonuçları toplarsak:

$75/216 + 15/216 \times 1/216 + 125/216 = 216/216 = 1$ elde ederiz ki 3 zarla atışta bu dört durumun herhangi birini elde etmenin kat'i olduğunu gösterir. Yani 3 zarla atışta ya hiç 6 gelmeyecektir ya da 1, 2, 3 defa 6 gelecektir. Bunu kat'iyetle söyleyebiliriz.

İkinci problem birleşebilen VEYA haline örnektir. İki atıcı ayrı ayrı hedefi tutturabildiği gibi birlikte de isabet kaydedebilirler. Çift isabetlerle bir adam iki defa ölmeyeceğinden müşterek isabetleri iki defa saymamak için bunu hesaplayıp toplamdan düşürmeliyiz.

2) İki atıcıdan birinin isabet ihtimali 70/100 değerinin 80/100 olduğuna göre birlikte atışta isabet ihtimali nedir? (Çift isabetler tek sayılacak.)

Ya atıcılardan birinin ya da diğerinin isabet kaydetmesi bizi ilgilendirdiğinden, iki kişi atış yaparken isabet şansımız artar. VEYA hali söz konusudur. İhtimalleri toplayıp, müşterek isabetleri bundan düşürmeliyiz. Bu müşterek kısım (yani çift isabetler) VE bahsinde gördüğümüz gibi, iki atıcının isabet ihtimalleri çarpılarak bulunur.

$80/100 + 70/100 - (80/100 \times 70/100) = 96/100$ olur.



Şekil 3. Akıllı bir maymun.

YENİ PROBLEMLER :

1) 6 zarla 2 defa 6 elde etme ihtimalini hesaplayınız.

2) Yukarıdaki problemde çeşitli VEYA hallerini hesaplamak için daha basit bir yol bulup bulamayacağımızı inceleyiniz.

DÜZELTME

BİLİM VE TEKNİK'in Ağustos 1970, 33. sayısındaki «Düşünmek ya da Düşünmemekte Dilenmek» yazısında bazı yanlışlara rastlanmıştır. Özur diler, düzeltiriz.

Sayfa	Sütun	Satır	Yanlış	Doğru
20	2	15	13, 14, 15, 16; 22	13, 14, 15, 16; 21, 22
20	2	25	$6/36 = 1/6$ ve toplamı	$6/36 = 1/6$, ve toplamını
21	1	20	$P(A \cap B)$	$P(A \cap B)$
21	1	37	$P(A \cap B)$	$P(A \cap B)$
21	2	1	Ve ile veyayı birçokları gibinizde	Ve ile Veya' birçokları gibinizde
21	2	12	$P(A \cap B)$	$P(A \cup B)$
22	1	27	12 toplamı 6 şeklide	12 toplamı 1 şeklide

TARİHDEN DERS

Greko-Romen uygarlığı konusunda bir otorite olan ünlü tarihçi Edith Hamilton bir zamanlar medeni dünyanın merkezi olan Atina'nın neden düştüğünü ve bir daha da eski durumuna yükselmediğini şöyle açıklıyor :

«Sonunda onlar özgürlükten ziyade emniyet ve rahat bir hayat istediler. Devlete birsey vermeyip herşeyi ondan bekletiler, ve istedikleri en büyük özgürlüğün sorumsuzluk özgürlüğü olduğu zaman, artık Atina'da Atina olmaktan çıkmıştır».