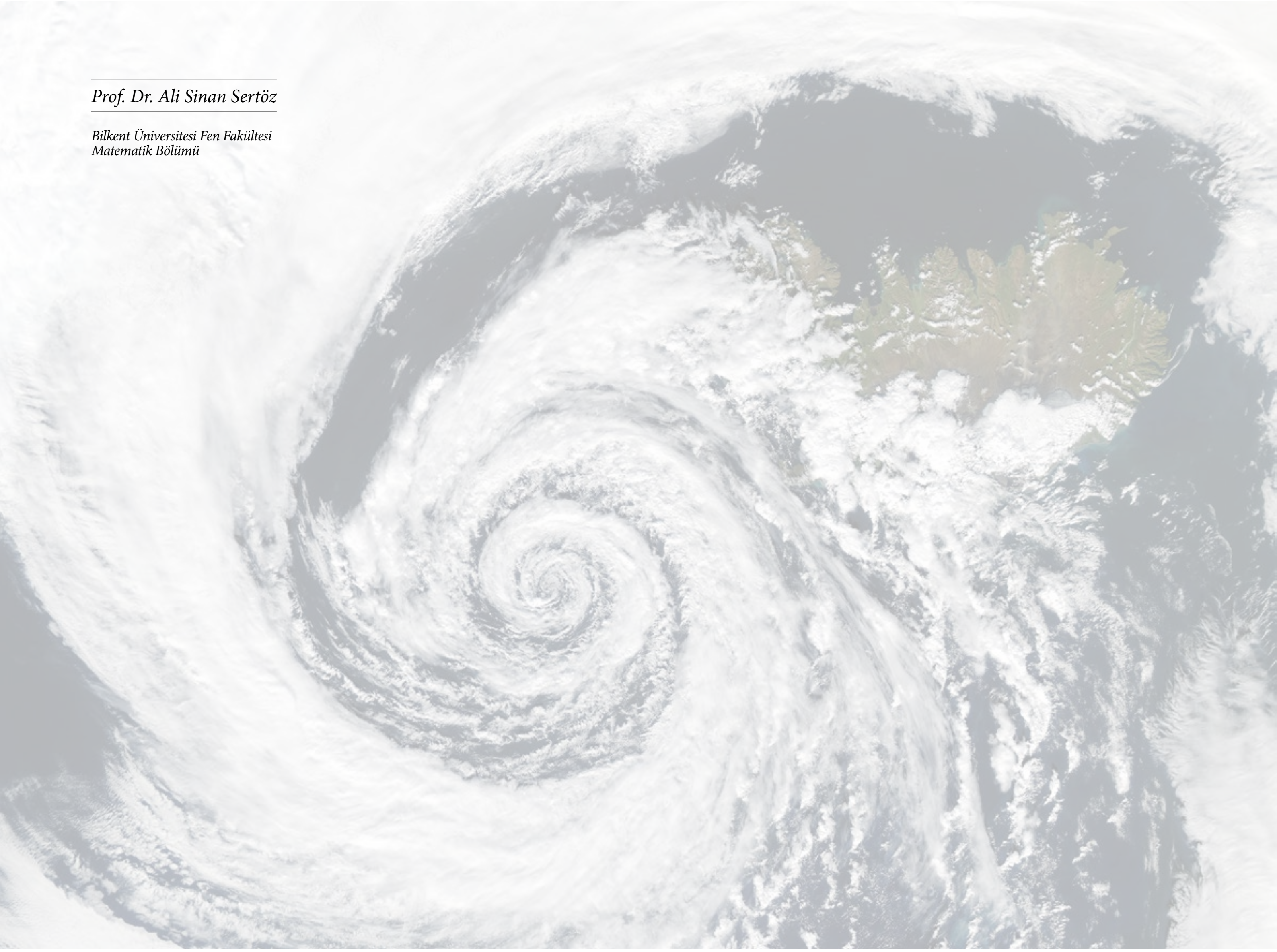
Prof. Dr. Ali Sinan Sertöz

Bilkent Üniversitesi Fen Fakültesi
Matematik Bölümü

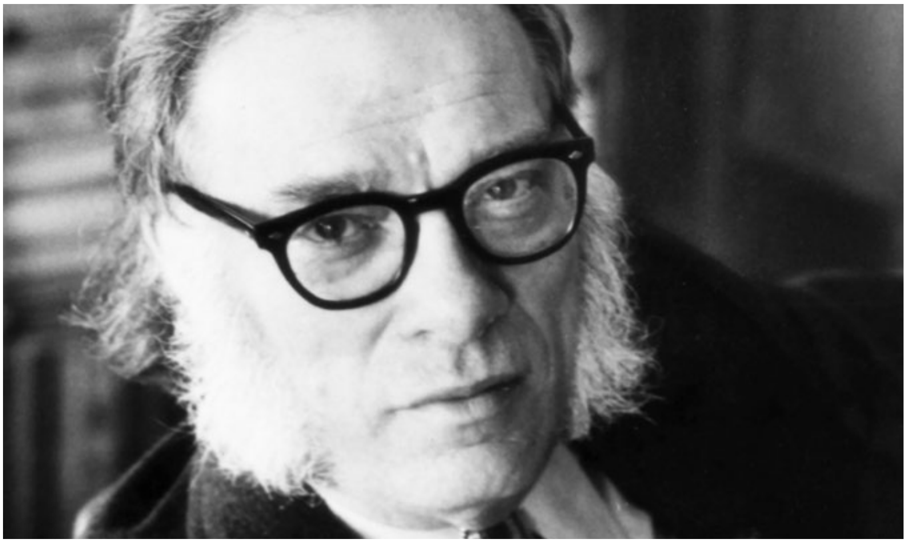


LOGARİTMA

Asimov *Güç Duygusu* adlı bilim kurgu öyküsünde, iki sayıyı alt alta yazıp bu iki sayının çarpımını hesaplayabilen Myron Aub adlı teknisyenin yarattığı sansasyonu anlatır. İnsanların en basit çarpma işlemlerini bile ceplerinde taşıdıkları hesap makinesiyle yaptığı bu uzak gelecekte, bir adamın çarpma işlemini elle yapabilmesi büyük şaşkınlık yaratır ve bu olay bir ulusal güvenlik konusu haline gelir.

Asimov bu öyküyü 1958 yılında yazdığında henüz hesap makineleri icat edilmemişti. 1992 yılında öldüğünde masaüstü bilgisayarlar yeni yeni yaygın kullanıma giriyordu. Ama insanların 72 ile 10'u çarpmak için ceplerinden akıllı telefonlarını çıkaracağı bir günün geleceğini Asimov bile öngörememişti.

Yaşadığımız bu günler bilim kurgu ötesi.



Isaac Asimov (1920-1992)

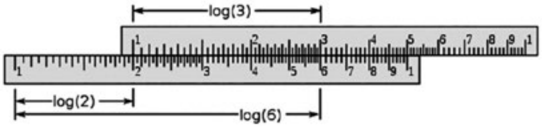
Elektronik hesap makinelerinin hayatımıza girmesinden önce üç yüz elli yıl boyunca bilim ve mühendislik dünyası çarpma ve bölme işlemlerini logaritma tabloları ve sürgülü cetvellerle yaptı. Yerlerini alıp onları tarihin unutulan antikaları kategorisine sokacak olan hesap makinelerinin tasarımı ve imalatı için gereken hesaplar da yine bu logaritma tabloları ve sürgülü cetvellerle yapıldı. 1980'lere kadar mühendislik ve fen öğrencileri ellerinde taşıdıkları sürgülü cetvellerden tanınırdı.

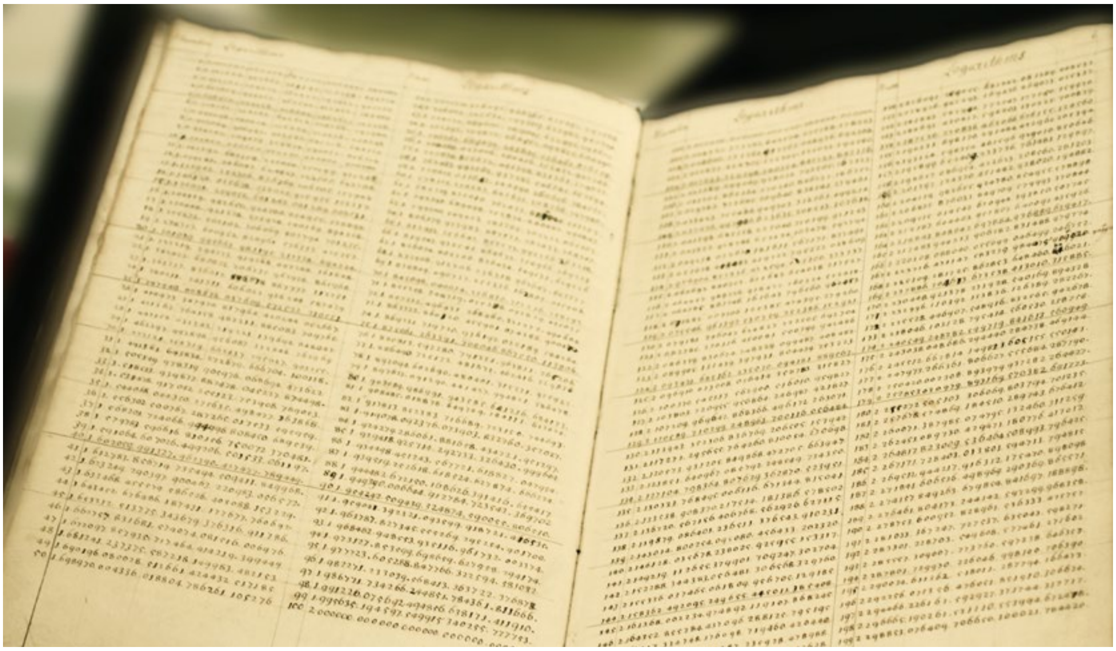
Logaritma tablolarıyla çarpma ve bölme yapmak, aynı işlemleri elle yapmaktan çok daha az zaman alır. Çarpmak istediğiniz iki sayının logaritmalarını tablolardan bulup toplarsınız ve bu toplamın hangi sayının logaritması olduğunu yine tabloya bakarak görürsünüz. Aradığınız çarpım o bulduğunuz sayıdır.

Sürgülü cetvelde ise birbiri üzerinde kayan iki parça vardır. Çarpmak istediğiniz sayının birini cetvelin alt kısmında bulup cetvelin orta kısmının baş tarafını bu sayının üzerine "sürersiniz". Çarpacağınız ikinci sayıyı cetvelin orta kısmında bulursunuz. Onun hemen altında, cetvelin alt kısmında gördüğünüz sayı, o iki sayının çarpımıdır.

Sürgülü cetvelin böyle mucizevi bir şekilde çalışmasının nedeni aslında logaritmaları toplamasıdır. Örneğin cetvelin üzerinde 2'nin logaritmasının olması gereken yere 2 yazılır, 3'ün logaritmasının olması gereken yere 3 yazılır. Yukarda tarif edilen kaydırma işlemini yaptığımızda log 2 ile log 3 sayılarını toplamış oluruz ve bu yüzden cetvelde vardığımız nokta log 6 sayısının olması gereken yerdir. Ama biz buraya da 6 yazdığımız için çarpımın 6 olduğunu hemen görürüz.

Nereden bilebilirdik ki son sürgülü cetvel 1976 yılında imal edilecek!





İngiliz bilim tarihçisi Benjamin Wardhaugh'un Oxford Bodleian Kütüphanesi'nde bulduğu 30 basamaklı logaritma defteri. Yazarı bilinmiyor. 1721-1759 yılları arasında yazıldığı anlaşılan bu defter 1'den 10.000'e kadar olan sayıların logaritmalarını içeriyor.

Bu fotoğrafı kullanmamıza izin veren Profesör Wardhaugh'ya teşekkür ederiz.

Niye Çarpıp Bölüyorlardı?

Günümüz teknolojisinin mühendislerin ve fencilerin çok ayrıntılı hesaplar yapmasını gerektirdiğini hiç kuşku duymadan kabul ediyoruz. Ama "eski insanlar neyi hesaplıyor olabilirler ki" diye küçümser bir soru da aklımıza takılmıyor değil.

Eskiden ellerinde bugünkü teknik olanaklar olmadığı için insanların kayda değer hiç bir şey yapmadığını, televizyon da olmadığı için boş boş oturduklarını düşünmeye yatkınız. Üç yüz elli yıl sonra bizim hakkımızda da böyle düşünüceklerdir.

Eski dönem insanları da elbette boş durmuyordu. Takvim hazırlamak, yön bulmak ve harita çizmek gibi "günlük hayatta" uygulaması olan işlerle uğraşmışlardı. Fenciler yıldızların ve gezegenlerin hareketlerini anlamaya çalışmıştı. Bu çeşit uğraşlarda genellikle uzaktaki iki cismin arasındaki uzaklığı ve hatta o cisimlerin bize uzaklığını hesaplamak gerekir. Bu da eninde sonunda bazı değerlerini bildiğimiz bir üçgenin diğer değerlerini bulma problemine dönüşür ve en sonunda problemi bir üçgende sinüs kuralının uygulanmasına indirgeriz.

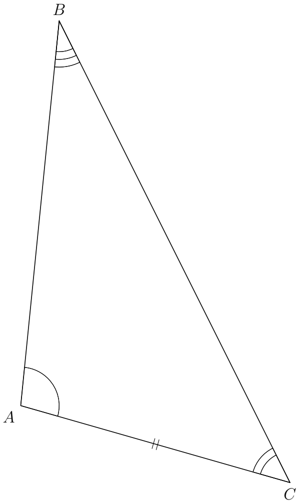
Bu kurala göre, bir üçgende bir açının sinüsünün karşı kenarın uzunluğuna oranı o üçgen için sabittir. Hangi köşedeki açıyı alıp sinüsünü karşı kenarın uzunluğuna bölerseniz hep aynı sayıyı bulursunuz. Tabii bu sayı üçgenden üçgene değişir.

Bu kuralın en basit uygulaması bir adanın kıyıdan uzaklığının hesaplanmasıyla gösterilebilir. Kıyıda bulunduğumuz A noktası ile açıktaki, B noktasındaki ada arasındaki uzaklığı ölçmek isteyelim. Önce karada A noktasından uzaklığını kolayca ölçebileceğimiz bir C noktası buluruz. Bu üç nokta (A, B ve C) bir üçgen belirler. Bu üçgenin A ve C köşelerindeki açıları ölçeriz. Bu bize B köşesindeki açıyı da verir, çünkü düzlemde bir üçgenin iç açılarının toplamı 180 derecedir. Şimdi sinüs kuralını uygularsak, AB uzaklığını bulmak için C köşesindeki açının sinüsüyle AC uzaklığını çarpıp B köşesindeki açının sinüsüne bölmemiz yeter.

Bu çeşit hesaplar sadece bir adanın uzaklığını bulmak için yapılmaz. Gök cisimlerinin uzaklığını belirlemek için de bu ölçümleri ve hesapları yapmamız gerekir. Ulaşılması zor iki dağ zirvesi arasındaki uzaklık ya da açıklarda görülen iki ada arasındaki uzaklık da bu yöntemle bulunur. Bir şehirdeki birbirinden uzak iki bina arasındaki uzaklığı bulmak için de elbette iki bina arasına ip germedi hiçbir zaman insanlar!

Üstelik eskiden bir açının sinüsü dendiğinde bugün olduğu gibi bir dik üçgende karşı kenarın hipotenüse oranı değil, karşı kenarın mutlak uzunluğu düşünülürdü. Hesapların hassasiyetine katkısı olsun diye de bu dik üçgenin hipotenüsünün uzunluğu çok büyük, örneğin on milyon olarak düşünülürdü. Bu da teknik hesaplarda kullanılacak sayıların büyük olmasına ve dolayısıyla çarpma bölme işlemlerinin çok zaman almasına neden olurdu.

On yedinci yüzyılın başında bilim dünyası bu çeşit hesaplardan bunalmış durumdaydı.



A ve C açılarını ölçünce B açısını da biliriz. Sonra AC uzaklığını ölçeriz. Sinüs kuralına göre

$$\frac{\sin C}{AB} = \frac{\sin B}{AC}$$

yazılır.

Bu eşitliği kullanarak

$$AB = \frac{\sin C}{\sin B} \cdot AC$$

yazar ve AB uzaklığını buluruz.

Bunun Bir Kolayı Yok mu?

Sayıları çarpıp bölme işlemini toplama çıkarma işlemine dönüştüren ve dolayısıyla işlemlerin çok daha hızlı yapılmasını sağlayan yöntemleri geliştiren ilk kişinin İskoçyalı Baron John Napier olduğu düşünülüyor. Bu işleme logaritma adını takan da Napier'dir. "Oran" anlamına gelen Yunanca *logos* kelimesi ile "sayı" anlamına gelen *arithmos* kelimelerini birleştirip *logarithmus* kelimesini türetmiştir. (Harizmi'nin adından türetilen *algoritma* kelimesinin logaritmayla bir ilgisi yoktur.)

Napier'le hemen hemen aynı yıllarda İsviçreli bir saat ustası olan Joost Bürgi de bu konuya el atmış ve Napier'den habersiz, onunkinden farklı bir logaritma sistem bulmuştur.

Napier'in bulduğu sistem kinematik bir yaklaşım kullanır. Napier'in sistemi çok çabuk terkedilip daha kolay anlaşılır ve daha kullanışlı sistemler geliştirilmiş olsa da, hem tarihi değeri açısından hem de insan zekâsının bir başarısına ortak olma arzusuyla bu sistemin ana hatlarını gözden geçirelim.

John Napier

Joost Bürgi

Napier'in sisteminde elimizde aynı hizadan başlayıp sağa doğru uzanan iki doğru parçası vardır. Bunlardan biri sağa doğru sonsuza kadar uzanırken öbürü on milyon birim uzunluğundadır. Her ikisinin sol başından birer nokta aynı anda sağa doğru aynı hızla harekete geçer. Sonsuz uzunluktaki doğru üzerinde hareket eden noktaya A diyelim, ötekine de B. Napier A noktasının hızının sabit olmasını, B noktasının hızının ise belli bir kurala göre azalmasını ister. A ve B noktalarının geçtikleri mesafeleri eşit zaman aralıklarında ölçersek, A noktası aynı zaman aralıklarında hep aynı mesafeyi geçerken, B noktasının bir zaman aralığında gittiği mesafe bir önceki zaman aralığında gittiği mesafenin sabit bir oranı kadardır. Napier'in zamanındaki terminolojiyle söylersek, A noktasının başlangıçtan itibaren gittiği mesafe aritmetik bir dizi halinde artarken B noktasının gittiği mesafe geometrik bir dizi olarak artmaktadır. B noktasının hızı her an önünde kalan mesafeyle orantılı olarak azalacak şekilde tanımlanır.

Napier herhangi bir zamanda B noktasının önünde kalan mesafenin logaritmasını, A noktasının o ana kadar geçtiği mesafe olarak tanımlar. Böylece on milyona kadar olan tüm pozitif sayıların logaritması tanımlanmış olur.

Napier bu kuralı uygulamak için art arda küçük zaman aralıklarında, noktaların ne kadar ilerleyeceğini yaklaşık olarak hesaplayan eşitsizlikler kurmuş ve ömrünün tam yirmi yılını bir logaritma tablosu hazırlamakla geçirmiştir. Yirmi yıl, zaman zaman hesaplarına konsantre olmak için sessizliğe ihtiyaç duyduğunda değirmenci komşusundan değirmenini durdurmasını rica ederek, logaritma tablolarının hesaplarıyla boğuşmuştur.

Bugün Napier'in bu tarifine bakarak bir diferansiyel denklem sistemi kurar ve Napier'in logaritmasını analitik olarak hemen hesaplayabiliriz ve Napier neden yirmi yıl uğraşmış diye de içimizden geçiririz. Oysa Napier logaritma tablolarını hazırlamaya başladığında, bizim bu diferansiyel sistemi kurmamızı sağlayacak türev bilgilerini geliştirecek olan Newton'un doğmasına daha neredeyse elli yıl vardı. O yüzden Napier türev kullanmadan, çok zekice kurgulanmış yaklaşımlarla tablolarını hazırladı, sabırla ve yirmi yıl boyunca.

Napier çalışmalarının sonuçlarını 1614 yılında *Mirifici Logarithmorum Canonis Descripto* adı altında yayımladığında Avrupa'da bir sansasyon yaratmıştı. Napier'in çalışmasını okuyan İngiliz matematikçi Henry Briggs konuyu bir de Napier'den dinlemek için yaklaşık 600 km yol gidip Napier'le buluşmuş ve Napier'in fikirlerinin matematik dünyasında kalıcı olmasında rol oynamıştır.

Napier logaritması üçgen çözümlemelerinde kullanılan denklemlerin çözümünü kolaylaştırmak için hazırlanmıştı. Üçgen çözümlerinde kullanılan sinüs kuralını yazıp altlar üstler çarpımı yapınca ilk ikisinin çarpımı diğer ikisinin çarpımına eşit olan dört sayı olduğunu görürüz. Bu dört sayıdan üçünün değerini biliriz ve dördüncüsünü bulmak isteriz.


MIRIFICI

Logarithmorum

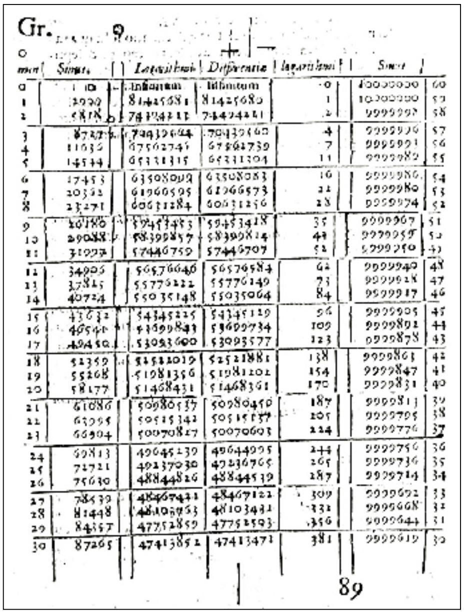
Canonis descriptio,

Ejusque usus, in utraque

Trigonometria, ut etiam in

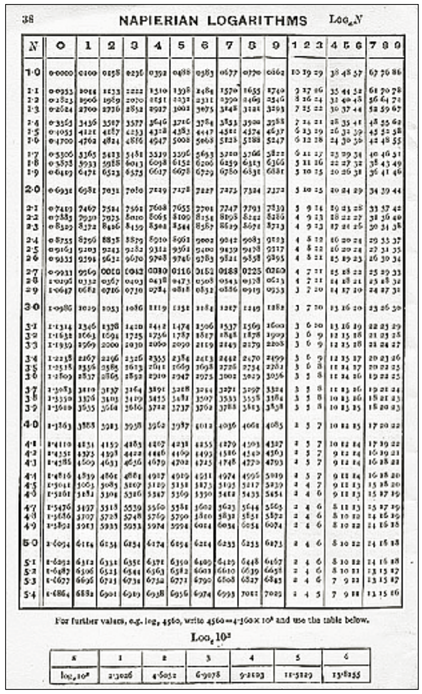
Authore ac Inventore,

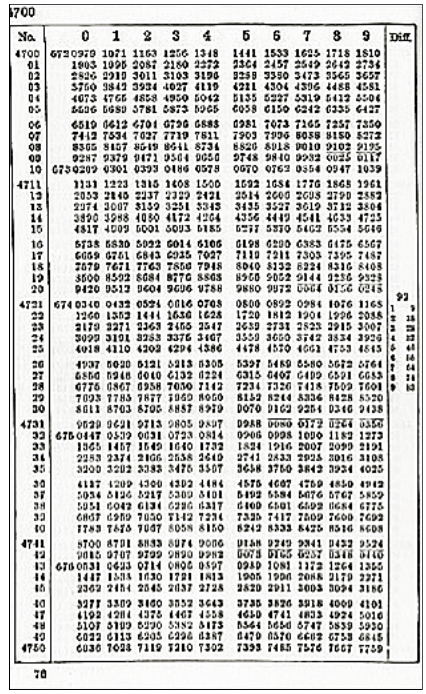
IOANNE NEPERO,



Napier'in Logaritma Tablosu

Kaynak: http://www.maa.org/press/periodicals/convergence/logarithms-the-early-history-of-a-familiar-function-appendix-student-tasks





Napier logaritması burada imdadımıza yetişir. İlk iki sayının Napier logaritmaları toplamı, son iki sayının Napier logaritmaları toplamına eşittir. Bu eşitlikten yararlanarak bilmek istediğimiz sayının Napier logaritmasını bir toplama ve çıkarma işlemiyle derhal buluruz. Sonra tekrar Napier'in tablosuna bakıp hangi sayının Napier logaritmasını bulmuşuz anlarız.

Böylece uzun uzun çarpma ve bölme işlemleriyle bulunacak bir sonuç, toplama çıkarma ve tabloya bakma işlemleriyle derhal bulunur hale geldi. Napier'in bu çalışmasını gören Pierre-Simon Laplace'ın Napier için "birkaç ayda bitecek hesapların süresini birkaç güne indirerek astronomların hayatını ikiye katladı ve onları bu çeşit hesaplarda hata yapıp mahcup olmaktan kurtardı" demesi çok yerinde bir tespittir. Bu arada ileride kendi adıyla anılacak üçüncü yasasının hesaplarında Napier'in yeni yayımladığı logaritma tablolarını kullanan Kepler'e hocasının "böyle çocukça yeni icatlara rağbet ettiği için" sitem etmiş olduğunu da hatırlatalım. Her yeniliğe karşı çıkan bir "eski" adam her devirde vardır.

Yalnız burada dikkat edilmesi gereken bir nokta var; iki sayının çarpımının Napier logaritması, o sayıların Napier logaritmalarının toplamına eşit değildi. Böyle "hoş" bir özellik taşıyan bir logaritma fonksiyonu için insanlık otuz üç yıl daha beklemek zorundaydı.

Bildiğin Logaritma!

Napier logaritma adını verdiği tablolarını yayımladıktan kısa süre sonra ve belki de Briggs ile konuşmalarının etkisiyle, çarpımların logaritmasının logaritmaların toplamına eşit olacağı başka bir logaritma kuralı bulmak gerektiğinden söz etmeye başladı.

On yedinci yüzyılın ilk çeyreğinde Avrupalı matematikçilerin harıl harıl üzerinde çalıştığı bu problemin ne olduğuna bir de bugünkü gösterimle bakalım.

Öyle bir fonksiyon arıyoruz ki çarpımı toplama çevirsin. Bu fonksiyona log dersek, ondan ilk istediğimiz log(ab)=log(a)+log(b) özelliğini göstermesi. Bundan da önemli bir isteğimiz daha var: Sayıların log değerlerini birileri önceden hesaplayıp tablolar halinde yayımlamış olsun ve biz her ihtiyaç duyduğumuzda hemen bu tabloları kullanalım.

Napier'in logaritması, ona Nlog dersek, ikinci isteğimizi tamamıyla yerine getiriyordu, ama birinci isteğimizden biraz uzak kalıyordu. Napier logaritmasına göre Nlog(ab) sayısı Nlog(a)+Nlog(b) sayısına eşit olmuyordu, ama eğer ab=cd ise Nlog(a)+Nlog(b)=Nlog(c)+Nlog(d) oluyordu ki bu da üçgen çözümlemeleri için yeterliydi. O yüzden çok şahane bir buluştu. Ama insanın gözü doymuyor işte!

Aranan özellikte bir logaritmanın ortaya çıkması tamamen bir tesadüf sonucu olmuştur.

e tabanına göre hazırlanmış, dört basamak hassasiyetli bir logaritma tablosu (üst solda). Bu tabloda 1,73 sayısının karşısında 5481 sayısını görürüz. Son basamak 2 için sağda ve aynı sırada 11 sayısını bulup ekleriz. Böylece ln 1,732=0,5492 bulduk. Aynı şekilde ln 2,741=1,0084 buluruz. Bu iki logaritmayı toplayınca bulduğumuz 1,5576 sayısının tabloda 4,7474 sayısının logaritması olduğunu görürüz. Böylece 1,732x2,741=4,747 bulduk. Bu pek çok durum için yeterli bir hassasiyettir.

10 tabanına göre hazırlanmış, yedi basamak hassasiyetli bir logaritma tablosundan bir sayfa (üst sağda). Bu tablonun diğer sayfaları kullanılarak log 1,732+log 2,741=0,6764569 bulduk. Bu sayfayı kullanarak bu sayının hangi sayının logaritması olduğunu bulabiliriz. Tabloda alttan dördüncü satırı incelersek 47.474 sayısının logaritması olarak 6.764.558 sayısını buluruz. Bunun elimizdeki sayıdan farkı 11'dir. En sağdaki düzeltme sütunundan 9 karşısındaki 1'i alırız, 47.474'ün sağına bitiştirir 474.741 buluruz. Elimizdeki 11'in 9'unu kullanmıştık, kalan 2'nin sağına 0 koyup 20 elde ederiz ve düzeltme sütunundan buna en yakın olan 18'in karşısındaki 2 sayısını da daha önce elde ettiğimiz 474.741 sayısının sağına yazarız. Böylece 1,732x2,741=4,747412 bulduk.

Hocam Sen Ne Yaptın!

Teknolojik gelişmelerde kullanılan matematiksel pek çok kavram, hiç bir uygulama gözetmeksizin sadece bilimsel merak sonucu bulunmuş ve bir uygulayıcı çıkıp gelene kadar raflarda beklemiştir. İşte logaritma fonksiyonunun bulunuşunun da böyle bir öyküsü vardır.

Arşimet MÖ üçüncü yüzyılda bir parabol eğrisinin altındaki alanı hesaplamıştı. Sırada bir hiperbol eğrisinin altındaki alanı hesaplamak vardı ve bunu kimse beceremiyordu. On yedinci yüzyılda hâlâ bu problem çözülememişti ve bunu çözen matematikçinin adını matematik tarihine büyük harflerle hem de Arşimet'in adının yanına yazdıracağı düşünülüyordu.

İşte Avrupa yeni bir logaritma fonksiyonu peşinde koşarken bu moda rüzgârlarının hiç etkisinde kalmadan kendi keyfinin doğrultusunda giden Gregoire de Saint Vincent bir hiperbol kolunun altındaki alanın özelliklerini incelemeye başladı. Üstelik bu alanın bazı hoş özellikleri olduğunu da gösterdi. Örneğin 1 noktası ile a noktası arasında ve hiperbol kolunun altında kalan alana Alan(a) dersek, Gregoire Alan(ab)=Alan(a)+Alan(b) olduğunu gösterdi. İki bin yıldır çözülemeyen bir problemi çözmenin mutluluğunu yaşadı. Adı Arşimet'in adının yanına yazılacak diye bekliyordu. Oysa neye niyet neye kısmet!

Gregoire de Saint Vincent

Gregoire'ın öğrencisi Alphonse Antonio de Sarasa hocasının 1647 yılında yayımladığı bu çalışmasını okuyunca "Hocam sen ne yaptın, farkında mısın?" diye haykırmıştır mutlaka. Gregoire'ın bulduğu bu alan özelliği, son otuz küsur yıldır aranan logaritma fonksiyonunun özelliğinin tıpa tıp aynısıydı. Gregoire böylece Arşimet'in çözemediği bir problemi çözen matematikçi olarak değil de Napier'in başlattığı bir devrimi tamama erdiren matematikçi olarak tarihe geçmeye aday oldu. Adını Arşimet'in adının yanında görmeyi planlarken önce kısmetine Napier düştü. Sonra da onun adıyla anıyor olmamız gereken logaritmaya doğal logaritma ya da bilinmeyen bir nedenden dolayı Napier logaritması dendi.

Gregoire mezarında ne kadar dönse yeridir.

Doğal ve Adi Logaritmalar

Newton'un ve Leibniz'in bilimsel düşüncede ve uygulamada devrim yaratan türev ve integral kavramları sayesinde bilim ve mühendislik dünyası için gereken logaritma tablolarını çok kolay bir şekilde hazırlamak mümkün oldu. Newton'un teknikleri kullanılarak yapılan hesaplar sonucunda, her logaritma fonksiyonunun Gregoire'ın bulduğu logaritma fonksiyonunun bir katı olarak yazılabileceği görülür. O yüzden Gregoire'ın logaritmasına doğal logaritma demek uygun kaçar, ama neden Napier logaritması dendiğini kimse bilmiyor.

Hesaplamaya en uygun logaritma fonksiyonu 10 sayısını taban olarak kullanan logaritmadır. Bu logaritmaya adi logaritma denir. Her pozitif sayıyı 10 üzeri bir başka sayı olarak yazabiliriz. İşte o "başka sayı" elimizdeki pozitif sayının adi logaritmasıdır. Bu logaritmanın tablolarını hazırlamak da bu tabloları kullanmak da çok kolaydır.

Öte yandan doğal logaritma hesaplanırken 10 sayısı yerine Euler'in e sayısı kullanılır. Bu sayı yaklaşık 2,7182 gibi bir sayıdır ve doğal hiç bir yönü yoktur, ama onu taban olarak kabul eden logaritma fonksiyonu çok doğal özellikler gösterir. Bugün çarpma bölme işlemlerinin artık elektronik olarak yapılıyor olmasına ve tarihte kullanılan logaritma tablolarının ve sürgülü cetvellerin terk edilmiş olmasına rağmen ln x olarak gösterilen doğal logaritma fonksiyonu bilim dünyasında kalmıştır. Bunun nedeni doğal logaritma fonksiyonunun kendine özgü davranış özelliklerinden dolayı, türev ve integral hesaplarda ve fiziksel olayların modellenmesinde kullanılmasıdır.

Pek çok fiziksel olgunun gelişimi, o olgunun o anki değerine bağlıdır. Örneğin ne kadar çok insan varsa o kadar çok nüfus artışı olur. Bu durum logaritma fonksiyonunun tersi olan üssel fonksiyonla modellenir. Kısacası "para parayı çeker" diye özetlenecek durumların modellenmesinde doğal logaritmanın tabanı olan e sayısı devreye girer. O yüzden logaritma fonksiyonu uygarlık var oldukça bizimle olacak, ama son üç yüz yıldır bizim hatırımız için yaptığı çarpma bölme işlemlerine yardımcılık görevinden emekli oldu.

Logaritmanın Türkiye'ye Gelişi

Sultan III. Ahmet zamanında 28 Çelebi adıyla tanıdığımız Mehmet Efendi Fransa'ya büyükelçi olarak atanır. Mehmet Efendi bu görevi sırasında Paris Gözlemevi'ni de ziyaret eder. O sıralar gözlemevi müdürü olan kişi meşhur Cassini'nin oğludur. Baba Cassini Satürn'ün halkaları arasındaki açıklığı keşfeden ilk astronomdur. Bu açıklığa bugün Cassini bölümü denir. 1997 yılında uzaya atılan ve 2004 yılında Satürn'e varıp araştırmalar yapan ve halen bu faaliyetlerini sürdüren insansız uzay sondasının adı olan Cassini-Huygens'teki Cassini de bu bahsettiğimiz baba Cassini'dir. Oğlu, Mehmet Çelebi'ye babasının yazdığı ama basılmamış bir kitabını hediye eder. Bu kitap İstanbul'a 1714 yılında gelir. Böylece logaritma Türkiye'ye, bulunuşundan tam yüz yıl sonra girmiş olur. Bu kitabı Sultan III. Mustafa'nın emri üzerine Kalfazade İsmail Efendi Türkçe'ye çevirir ve 1765 yılında yayımlar. Osmanlı tarihçisi Cevdet Paşa bazı anekdotlara dayanarak logaritmayı Türkiye'de ortaya atan ilk kişi olarak Gelenbevi İsmail Efendi'yi gösterse de Gelenbevi'nin kitabı Kalfazade'nin kitabından sonra yayımlanmıştır.


Giovanni Domenico Cassini

Kalfazade tercümesinde "Bilinmelidir ki Frenkler, Logaritma adını verdikleri, 1'den 10.000'e kadar sayıların logaritmasını içeren bir cetvel düzenlemiştir. İki sayıyı çarpmak gerektiğinde sadece logaritmalarını toplamak yeterli olmaktadır ve toplam da çarpımın logaritmasını vermektedir" diye yazar. Cassini her ne kadar bu kitapta logaritma kullanarak hesaplar yapmaktaysa da kitapta ayrıca logaritma tabloları yoktur. Bu yüzden Kalfazade kendi tercümesine logaritma tabloları da eklemiş ve nasıl kullanılacağını açıklamıştır.

Bu bilgileri genç bir denizci teğmenin, o zamanki adıyla Salih Mourad'ın 1914'te Edinburgh'ta düzenlenen ve logaritmanın üç yüzüncü yılını kutlayan bir konferansta yaptığı "Logaritma'nın Türkiye'ye Girişi" başlıklı bir konuşmadan öğreniyoruz. Bu teğmen daha sonra Salih Murat Uzdilek adını almış ve İstanbul Teknik Üniversitesi'nde ordinaryüs fizik profesörü olmuştur.

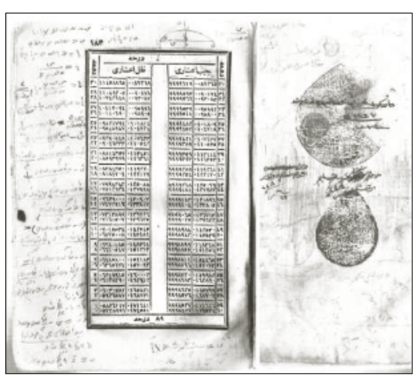

Salih Murat Uzdilek

Logaritma'nın Türkiye'ye Geldiği Yıllarda ABD

Matematiğin bir hobi olarak zihinsel bir mutluluk verdiğinin en güzel örneklerinden biri 1721 ile 1759 yılları arasında hazırlanan bir logaritma tablosudur. Hakkında ABD'nin Pennsylvania eyaletinin Philadelphia şehrinde hazırlandığından başka hiç bir bilgiye sahip olmadığımız bir defterde 1'den 10.000'e kadar tamsayıların logaritmaları tam otuz basamak hassasiyetle hesaplanmıştır. Oxford Bodleian Kütüphanesi'nde Benjamin Wardhaugh tarafından bulunan bu defterin yazarını bilmiyoruz. Defterin herhangi bir terfi, şöhret amacıyla veya yayımlanmak için hazırlandığına dair bir belirti yok. Yazarı hayatının kırk yıla yakın bir dönemini bu tabloları tamamen kendi zevki için hazırlamakla geçirmiş. Pek çok sinüs ve log-sinüs tablosu da içeren bu defter aynı zamanda pi sayısının 154 basamak açılımını da verir. Yüz yıla yakın bir süre bu açılım sessiz bir rekor olarak kalmıştır. Defterin yazarı bu rekorla adının anılması için dahi adını defterin başına yazmaya tenezzül etmemişti. Öte yandan Baron Jurij Bartolomej Vega ise bu çalışmadan habersiz olarak 1789 yılında pi sayısını 140 basamak hesapladığında bu bir rekor olarak tanınmıştı. Baron Vega hazırladığı ayrıntılı logaritma tabloları ve pi sayısının basamaklarını hesaplamaktaki becerisiyle Petersburg Akademisi'ne seçilmeyi ummuş ama üyeliğinin kabul edildiğini görmeye ömrü yetmemişti.

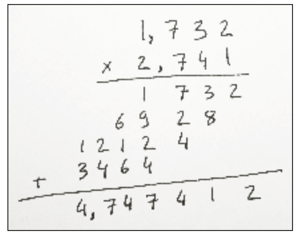
Başarılarıyla akademilere seçilmeyi hedefleyen şöhretli adamlar ve arka planda kalıp onların becerdiğinden daha büyük işler çıkaran sessiz kahramanlar. Bilim dünyasının her dönem var olan oyuncuları.

Bu logaritma defterinin öyküsünü İngiliz bilim tarihçisi Benjamin Wardhaugh'un kaynaklarda belirttiğimiz makalelerinden okuyabilirsiniz.

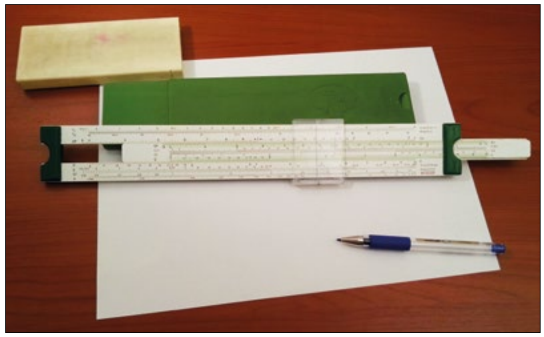

Logaritma Cetveli, Hasköy/İstanbul, Mühendishane Matbaası, 1798 ve Mühendishane Kütüphanesi'nin mühürleri

Sürgülü Cetvel

İki sayıyı logaritma kullanarak çarpmak için o iki sayının logaritmasını tablodan bulup toplamak, sonra yine tabloya bakıp hangi sayının logaritmasının bu toplama eşit olduğunu bulmak Laplace'ın dediği gibi "astronomların hayatını ikiye katlamıştı" ama bir süre sonra bu iş de yorucu gelmeye başladı. Bunun mutlaka daha kolay bir yolu olmalıydı. Sürgülü cetvel böyle ortaya çıktı. İlk sürgülü cetvelin 1622 yılında William Oughtred tarafından yapıldığı düşünülüyor.



Elle yapılan çarpma işlemi



Sürgülü cetvel

Notilis kabuğu kesitinde logaritmik spiral eğrisi gözlenir.

Sürgülü cetvel iki sayının logaritmalarını mekanik olarak toplayıp cevabı da anında gösterdiği için logaritma tablolarına bakmaya gerek kalmıyordu.

Sürgülü cetvelin küçük bir kusuru vardı. İki çizgi arasında kalan noktanın hangi sayıya karşılık geldiğini göz kararı buluyorduk. Örneğin aradığımız sayı 2,7 ile 2,8 arasında görünüyorsa, tam nerede olduğunu biz tahmin etmeye çalışıyorduk; tam ortadaysa 2,75, tam ortada değilse 2,74 veya 2,78 gibi bir tahminde bulunuyorduk. Pek çok hesapta bu hassaslık yeterliydi. Üstelik hesap yapmanın kolaylığı da sürgülü cetvelleri bilim ve mühendislik dünyasının vazgeçilmez aksesuarı yapmıştı bile. "Vazgeçilmez" derken bilmiyorduk tabii, ama meğer sadece üç yüz yıllık bir dönemden bahsediyormuşuz.

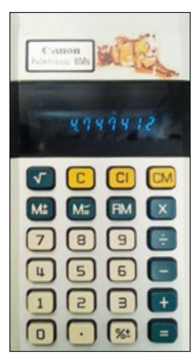
Son sürgülü cetvel 1976'da imal edildi. O yıl doğanlar sonradan anne babalarının anlattığı sürgülü cetvel anekdotlarını boş gözlerle dinlediler. Öyle ya, ben şimdi size kalkıp eskiden kullandığım rotaxteram adlı aletten söz etsem siz ne anlarsınız? Yok öyle bir alet, ben uydurdum! Gençler de "sürgülü cetvel" lafını uydurulmuş bir isim olarak algılıyor artık.

Hesap Makineleri Geliyor

Ankara'daki kırtasiyecilere 1970'li yıllarda gelen ilk hesap makineleri kilitli cam vitrinlerde sergilenirdi. Herkes fiyatını merak ettiği için de hesap makinesinin yanına fiyatını belirten bir etiket mutlaka koyulurdu. Bir kaç kez bu etiketin demirbaş numarasını belirtiğini sanıp aletin fiyatını sormuştum, o denli pahalıydılar. Bir gün hesap makinem olacağını hayal dahi etmemiştim.

Teknoloji kısa zamanda hesap makinelerini herkesin satın alabileceği fiyata imal etmeye başladı. İlk hesap makinemi doktora çalışması yaptığım yıllarda aldım. Kuramsal matematik çalıştığım için hiç ihtiyacım yoktu bu makineye ama dört beş haneli sayıları şimşek hızıyla çarpıyor olmasına, koskoca sayıların kareköklerini hemen bulmasına hayrandım. Başka işim olmadığı zamanlarda büyük bir zevkle sayıları çarpar böler ve Kepler'in elinde böyle bir oyuncak olmadan o koca hesapları nasıl yaptığını merak ederdim. Bunca oynamaya pil dayanmazdı. Her hafta yeni pil almam gerekirdi. Pil masrafına yetişemeyince adaptör kullanmaya başlamıştım. Şarjlı piller henüz yaygın kullanımda değildi. O zamanlar hesap makinelerinin ekranında gerçek lambalar vardı ve pilin enerjisini hızla emiyorlardı. Henüz ışık yayan diyotlar, LED'ler icat edilmemişti. Üstelik bu hesap makineleri sadece dört işlemi ve karekök alma işlemini yapıyordu.

Sürgülü cetvelde 1,73x2,74 işleminin sonucu olarak alttaki yeşil bantın hemen altındaki beyaz sıradaki sayıyı 4,74 olarak okuyoruz.
Böylece 1,73x2,74=4,74 sonucunu hemen bulduk.



1978 yılında aldığım ilk hesap makinesi.
Ekranda 1,732x2,741
işleminin sonucu görülüyor.

Bilimsel fonksiyonlu ve LED ekranlı ilk hesap makineleri 1980'lerde ortaya çıktı. Bunların pillerini birkaç yılda bir değiştirmek yetiyordu.

Sonra akıllı telefonlar girdi hayatımıza, akıl almaz binlerce uygulamayla beraber. Bu uygulamalardan bir tanesinde çözmek istediğiniz denklemi akıllı telefonunuzun kamerasına gösterip netleştirince ekrana dokunuyorsunuz ve cevap ekranda hemen görünüyor.

Çarpma işlemlerini kolaylaştırmak için yirmi yılını logaritma tablosu hazırlamakla geçiren Napier bunu görse ne yapardı acaba? "Ne güzel bir uygulama" mı derdi yoksa yere atıp üstünde tepinir miydi?

Şu Logaritma Fonksiyonu Dedikleri Şey

Bir fonksiyonu anlamanın en kolay yolu o fonksiyonun grafiğine bakmaktır. Örneğin her sayının karesini veren bir fonksiyonun grafiği bir parabol eğrisidir. Acaba her sayının doğal logaritmasını veren bir fonksiyonun grafiğinin şekli nasıl olur? Bu grafiği *Bilim ve Teknik* dergisinin sayfalarını kullanarak çizelim. Dergiyi açınca sol alt köşe 1 sayısının logaritması olan 0 sayısına karşılık gelsin. Bu köşeden sağa doğru gittikçe, kaç santim gittiysek o sayının logaritmasını sayfada yükseklik olarak işaretleyelim.

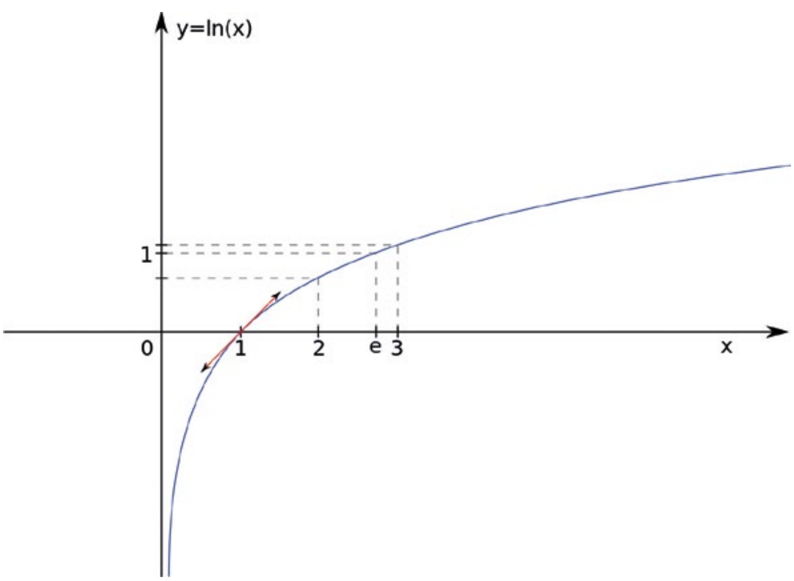
İlk sayfanın sonuna geldiğimizde logaritma fonksiyonunun grafiği sayfanın altından 3 cm kadar yükselmiş olacak. Bir sayfa daha ekleyelim elimizdeki sayfanın sağ yanına ve logaritma fonksiyonunun grafiğini çizmeye devam edelim. İkinci sayfanın sağına geldiğimizde logaritma fonksiyonunun grafiği 3,7 cm kadar yükselmiş olacak. Moralimizi bozmayalım, sayfa eklemeye devam edelim. Kırk bir milyar dokuz yüz altmış milyon yedi yüz yirmi dokuz bin iki yüz elli bir sayfayı yan yana koyarsak logaritma fonksiyonu en son sayfanın sağında nihayet sayfanın en üst köşesine ulaşacak. Bu kadar *Bilim ve Teknik* sayfasını yan yana koyarsanız Dünya'nın etrafını 220 defa dönersiniz ya da Ay'a 11 defa gider gelir, bir daha gidersiniz.

Eğer logaritma fonksiyonunun sadece 27,5 cm değil de 100 cm yükselmesini isteseydik, kullanmamız gereken *Bilim ve Teknik* sayfalarını yan yana koyup evrenin çevresini bir kaç kez dolanabilirdik. Tam olarak ne kadar dolanırdık diye sorarsanız: Evrenin çevresini her bir milyar kere dolandığınızda bir kenara bir kibrit çöpü koyun. Biriktirdiğiniz bu kibrit çöplerinin sayısı yüz bin olunca elinizdeki *Bilim ve Teknik* sayfaları bitecek.

Ve daha sonsuzluktan söz etmeye başlamadık bile. Logaritma fonksiyonu eninde sonunda sonsuza gider ama yerden bir metre yükselmesi için ne kadar kâğıt kullanmamız gerektiğini gördünüz. Logaritma fonksiyonunun sonsuza gideceğini deneysel olarak görüp ikna olmamız mümkün değil. Hiçbir gözlem bize logaritma fonksiyonunun sonsuza gideceğini ima etmez. Bunu ancak kuramsal olarak ispatlayabiliriz.

Bilimi heyecanlı kılan da işte bu olgudur. Hiç kimse logaritma fonksiyonunun grafiğinin sonsuza gittiğini görmemiştir ve bu grafiğe bakarak böyle bir şeyden şüphelenmek de mümkün değildir, ama yine de grafiğin sonsuz yüksekliğe çıkacağını kesin olarak biliyoruz. Bilmek kudrettir.

Alfred Hithcock'un *Arka Pencere* filmi için dediği gibi: "Bütün bunlar sizi heyecanlandırmıyorsa kendinizi çimdikleyin. Ölmüş olabilirsiniz."



Kaynaklar

- http://www.maa.org/press/periodicals/convergence/logarithms-the-early-history-of-a-familiar-function-introduction
- https://en.wikipedia.org/wiki/Observable_universe
- Katz, V., A *History of Mathematics, An Introduction*, 3rd Edition, Addison-Wesley, 2009.
- Avcı, Y., Ergun, N., Alnıaçık, K., "Kolay Yoldan Logaritma", *Matematik Dünyası Dergisi*, Sayı III, s. 10-12, 1995.
- Napier. N., The Construction of the Wonderful Canon of Logarithms, (Çeviri: William Rae Macdonald), Andrew Hart, 1888.
- Cajori, F., A History of the Logarithmic Slide Rule and Allied Instruments, Engineering New Publishing Co., 1909.
- Bruce, I., "Napier's logarithms", American Journal of Mathematics, Cilt 68, Sayı 2, s. 148-154, 2000.
- Ayoub, R., "What is Napierian Logaritm?", *The American Mathematical Monthly*, Cilt 100, Sayı 4, s. 351-364, 1993.
- Knott, C. G., (Editör), *The Napier Tercentenary Memorial Volume*, The Royal Society of Edingbugh, 1915.
- Mourad, S., "Introduction of Logarithms into Turkey", *The Napier Tercentenary Memorial Volume*, s. 139-144, 1995.
- Etker, Ş., "Salih Murat Uzdilek ve "Logaritmanın Türkiye'ye Girişi", *İstanbul Üniversitesi Osmanlı Bilimi Araştırmaları Dergisi*, Cilt VIII, Sayı 2, s. 55-76, 2007.
- Wardhaugh, B., "A 'lost' chapter in the calculation of π: Baron Zach and MS Bodleian 949", *Historia Mathematica*, Cilt 42, s. 343–351, 2015.
- Wardhaugh, B., "Filling a Gap in the History of pi, An Exciting Discovery", *The Mathematical Intelligencer*, Cilt 38, Sayı 1, s. 6-7, 2016.