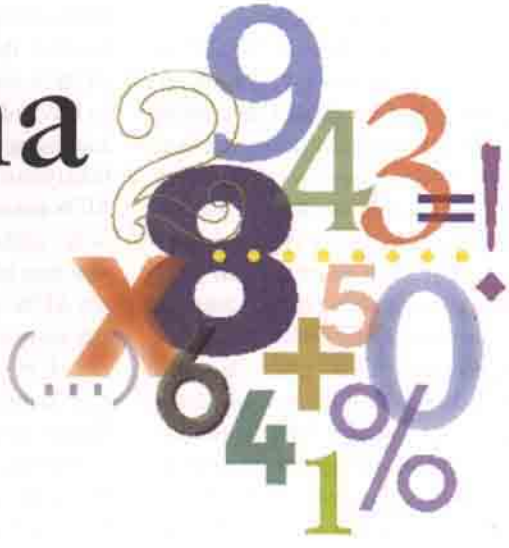
# Matematik Üzerine Bir Konuşma



*Eğitim hayatı boyunca çocuklar bilim adamı niteliğindeki kişilerle pek sık karşılaşmazlar. Oysa bilim adamlarıyla çocukları buluşturmak, çocuklarda varolan bilime yabancılık hissini azaltır. Aslında bilim öcü değil, anlamaya çalıştıkça keyif veren bir oyundur. Ne de olsa bilimi üreten insanlar da bir zamanlar çocuktu ve geleceğin bilim adamları da bugünün çocukları arasından çıkacak.*

BİLİNMEYEN KORKUTUR. Matematik de, bir muamma olarak, pek çok çocuk için korkuyu çağrıştıran bir olgudur. Çocukların problem çözmenin zevkine varmaları ve matematikten keyif almayı öğrenmeleri için, iyi bir eğitim almaları gerekir. Bağımsız ve doğru düşünmeyi alışkanlık haline getirmesi öngörülen matematik eğitimi, sadece sınıf içinde ders anlatma ve ödev yüklemeyle yapılamayacağından, değişik etkinliklerle desteklenmelidir. Düşündüren eğlenceli oyunlar ve bilmecelerle sınıf çalışmaları zenginleştirilebilir. Öğrencilere kuramlarını okudukları matematikçileri tanıtacak yazılar, resimler, yaşam öyküleri aktarılabilir. Matematikçileri tanımak, bilim adamlarını kendinden çok farklı gören öğrencinin bu yargısını değiştirmesini sağlayacak ve matematikten çekinme hissini azaltacaktır.

16 Ocak 1996'da Türk Eğitim Derneği Ankara Koleji'nde, TÜBİTAK Başkanı Prof. Dr. Tosun Terzioğlu'nun yaptığı konuşmada bu etkileşimin iyi bir örneği yaşandı. Prof. Dr. Tosun Terzioğlu, yurt içinde ve dışında üniversitelerde eğitmenlik ve yöneticilik yapmış bir matematikçi olarak, ortaokul öğrencilerine matematiğin en basit ve temel konularından biri olan doğal sayılardan bahsetti. Matematiğin birçok kavramıyla yeni tanışan bu genç kitle, büyük bir ilgi ve heyecanla, doğal sayılar içinde özel bir küme olan asal sayılardan başlayıp matematiğin geneline giden bir yolculuk yaptı.

## Prof. Dr. Tosun Terzioğlu'nun Konuşması

İnsanlık tarihine bakıldığında ilk insanların matematik kavramını sayılarla ortaya çıkardıkları söylenebilir. Belki insanlar, daha tarımla ve hayvancılıkla bile uğraşmaya başlamadan önce birtakım nesneleri saymak zorunluluğu duydular. Örneğin arkadaşlarını saydılar. Düşmanlarının arkadaşlarından daha çok olup olmadığını anlayabilmek için, zaman zaman düşmanlarını da saydılar. Belki sonraları, hayvanlarını ve mallarını saydılar. Giderek bu ilkel sayma işleminden sayıları, soyut birer kavram olarak ortaya çıkardılar: "Beş koyunum, beş düşmanım, beş elmam var", hepsindeki ortak özellik "beş" sayısı.

Tüm bu evrelerin nasıl yaşandığını kesin olarak bilemeyiz ama insanların bir zamanlar saymak için çakıl taşı kullandıklarını biliyoruz. Hatta şimdi kullanılan İngilizcedeki "calculus" deyişi, Latincede çakıl taşlarından gelmektedir. Benim öğrenciliğimde sayı saymak için fasülye taneleri kullanılırdı. O zamanlar, kuru fasülye ucuzdu ve böyle işler için kulanılabiliyordu!

Bugün, saymak için kullandığımız doğal sayılardan (1, 2, 3, ...) bahsedeceğiz. Öyle doğal sayılar var ki, sadece kendisi ve 1 ile bölünebiliyor. Kabaca tanımlanırsa, bu özelliğe sahip sayılara asal sayılar denir. Bu sayıların birtakım ilginç nitelikleri var. Asal sayı olma koşulu içinde bir "bölme işlemi" söz konusu. Kendisi ve 1 ile bölünebilen sayılardan bahsediliyor. Herhangi bir a doğal sayısı alındığında, öyle d, b, k doğal sayıları bulunabilir ki, a sayısı şu şekilde yazılabilir:

$a = d \cdot b + k, \quad (k = 0, 1, 2, ..., b - 1)$

Bu ifadede bölen sayı, b, a'dan küçük bir sayıdır. Kalan sayı, k, sıfırdan b - 1'e değişebilir. Burada bir sayının bölenleri merak ediliyor. Yani, a sayıları verildiğinde, hangi b sayıları bulunabilir ki $k = 0$ olsun. Verilen bir sayının bölenleri sadece 1 ve sayının kendisi ise, yani $b = 1$ veya $b = a$ ise, sayı asaldır.

Asal sayılar nasıl bulunabilir? M.Ö. 230'da İskenderiyeli matematikçi Erastosthenes'in önerdiği elek sistemiyle asal sayıları bulabiliriz:

Bir eleğimiz olsun ve elimizi doğal sayılar çuvalına daldırarak, art arda gelecek şekilde avucumuza aldığımız sayıları eleğe atalım. Bu sayıları eleyeceğiz ve en üstte kalanlar asal sayı olacak. Önce doğal sayıları belli bir yere kadar yazalım:

| 1 | **2** | **3** | 4 | **5** | 6 | **7** | 8 | 9 | 10 | **11** | 12 | **13** | 14... |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | 2 | | 2 | | 2 | | 2 | 3 | 2 | | 2 | | 2 |

Sayıları baştan başlayarak ele alıp teker teker neleri böldüğüne bakacağız ve bölünenleri eleyeceğiz. 1 sayısını atıyoruz, çünkü 1 sayısı asal sayı tanımının dışında bırakılıyor. İlk olarak 2'ye bakalım. 2 asal ve tüm çift sayıları bölüyor. 4, 6, 8, 10 ... elendi. Elenen sayıların altlarına bölenlerini yazarak işaretleyelim. Eleği ilk salladığımızda alta düşenler çift sayılar oldu. Sonra 3'ü ele alalım, 3, 6'yı, 9'u, 12'yi ... bölüyor. Hepsini eliyoruz. 4'e geldik. 4 elenmişti, geçip 5'e bakalım. 5'in böldüklerini de eleyelim. Bu işlem devam ettirilerek asal sayılar bulunabilir.

Peki asal sayılar ne işe yarıyor? Asal olmayan herhangi bir doğal sayı, asal sayı-

ların çarpımı şeklinde yazılabilir. Örneğin 9 = 3 . 3, 3 asal sayısının iki kez çarpımı olarak yazılabiliyor. Aynı şekilde 14=2.7, 2 ve 7 asal sayılarının çarpımına eşit ve bu çarpım tek! Yani 14'ü, 2 ve 7'den farklı asal sayıların çarpımı olarak yazamıyoruz. Bu gözlemden şöyle bir sonuç çıkarılabilir: "Herhangi bir a sayısı verildiğinde, bu sayı için iki olasılık vardır:

(i) a sayısı asaldır.

(ii) a, asal bir sayı değilse, tek bir biçimde asal sayıların çarpımı olarak yazılabilir:

$a = p_1 \cdot p_2 \cdot p_3 \cdots p_n$, $p_1, p_2, \ldots, p_n$ asal sayılardır ve bazıları birbiriyle eşit olabilir."

Sayılar asal çarpanlarına ayrıldığında, farklı sayıların asal çarpanlarının karşılaştırılması da düşünülebilir. 18 ve 30 sayılarına bakalım:

18 = 2 . 3 . 3

30 = 2 . 3 . 5

Bu noktada sorulabilecek "Her iki sayıyı da bölebilenler arasında en büyüğü hangisi?" sorusuna kolayca cevap verilebilir. Asal çarpanlarına ayrılan her iki sayıya da bakıldığında ortak bölenler, 2 ve 3'ün çarpımı 6'nın (2 . 3 = 6) en büyük ortak bölen olduğu görülür.

Başka ve daha ilginç bir soru sorulabilir. Belirli aralıklar alınıp bakıldığında, asal sayılar nasıl dağılıyor? Hangi aralıkta kaç tane asal sayı var? 1 - 100 aralığı ele alınırsa buradaki 25 asal sayı kolayca hesaplanabilir: 2, 3, 5, 7, 11, 13 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 53, 59, 61, 67, 73, 79, 83, 89, 97. Bundan sonra 100'er 100'er sayılara bakılırsa, 1000'e kadar olan sayılarda aynı aralıktaki asal sayı sayısının fazla değişmediği ve 25 civarında olduğu gözlemlenir. Daha büyük sayı aralıklarında örneğin, 9 999 900 - 10 000 000 arasında 9 tane asal sayı var:

9 999 901, 9 999 907, 9 999 929, 9 999 931, 9 999 937, 9 999 943, 9 999 971, 9 999 973, 9 999 991. Bir sonraki aralıkta, 10 000 000-10 000 100 arasında ise sadece iki asal sayı var:

10 000 019 ve 10 000 079. Daha ileri gidilirse, aynı aralıktaki asal sayı sayısı genelde azalır. Bu durumun doğal olduğu düşünülebilir çünkü, bir sayıyı bölen sayılar, kendisinden önce gelir. Bir sayıdan önce ne kadar çok sayı geliyorsa, bölünme olasılığı artar ve asal sayı olma olasılığı azalır. Asal sayıların belirli bir yerde nasıl dağıldığını tahmin etmek ve kanıtlamak, matematiğin en zor problemlerinden biridir. Burada ilginç bir nokta var. İnsanlığın yaklaşık 5000 yıl önce keşfettiği ve matematiğin en temel kavramı olan sayılarla ilgili hiçbir sorun yok gibi görünmekle birlikte, bugün bile çözülmesi çok zor olan problemler karşımıza çıkabiliyor.

Akla gelebilecek bir diğer soru asal sayıların kaç tane olduğu. Asal sayılar sonlu mu, sonsuz mu? Soruyu şöyle de sorabiliriz: Herhangi bir sayı verildiği zaman, bu sayı ne kadar büyük olursa olsun, ondan daha büyük bir asal sayı bulunabilir mi? Bunun cevabı çok gerilere, M.Ö. 300'e, Euclid'e kadar gidiyor. Euclid'in "Verilen herhangi bir sayıdan büyük ve asal bir sayı vardır." teoreminin M.Ö. 300'lerde matematiğin en temel kavramlarıyla kurgulanmış güzel kanıtı oldukça kolay.

Teoremin doğru olmadığını düşünelim. Bu sonlu sayıda asal sayı var demek. $p_n$ en büyükleri olmak üzere, n tane asal sayı olduğunu kabul edelim. Bunlar, $p_1$, $p_2$, ..., $p_n$ olsun. Bunları birbiriyle çarparak bir a sayısı elde edelim:

$a = p_1 \cdot p_2 \cdot p_3 \cdots p_n$

a sayının asal olmadığı açıktır çünkü, $p_1$, $p_2$, $p_3$, ..., $p_n$ sayılarının her birine bölünür ve a sayısı, $p_n$'den büyüktür. Şimdi a sayısına 1 ekleyerek A sayısını elde edelim:

$A = a + 1 = p_1 \cdot p_2 \cdot p_3 \cdots p_n + 1$

A sayısı da $p_n$'den büyüktür. Asal çarpanlarına ayırma teoreminden biliyoruz ki A sayısı ya asaldır ya da asal çarpanlarına ayrılabilir. Eğer A asalsa, $p_n$'den büyük olduğu için kanıtımız sonuçlanıyor. Eğer A asal değilse, elimizdeki asal sayıların çarpımı şeklinde yazılabilmeli. Ama yazılamıyor, çünkü A sayısı, $p_1$, $p_2$, $p_3$, ..., $p_n$'den herhangi birine bölününce hep 1 kalıyor. A'nın asal çarpanlarına ayrılabilmesi için, $p_n$'den farklı ve büyük bir asal sayı olmalıdır. Her iki olasılıkta da en büyük asal sayı kabul edilen $p_n$'den daha büyük ve asal bir sayı bulunabiliyor. O halde asal sayılar, seyrelse de sonsuz çokluktadır.

Asal sayılarla ilgili özelliklere göz gezdirmeye devam edelim. Ard arda gelen, aralarındaki fark 2 olan, asal sayılara bakalım. (3, 5), (7, 11), (17, 19), ... örneklerinde olduğu gibi (p, p + 2) çiftine asal ikizler denir. Burada hem p, hem de p + 2 asal olmalıdır. Ancak (7, 9) çiftinde görüldüğü gibi, her asal sayıya 2 eklendiğinde asal ikiz elde edilmez. Asal sayıların sonsuz olduğunu ispatladık. Acaba asal ikizlerin sayısı da sonsuz mu? Soru oldukça basit olmakla birlikte cevabı o kadar basit değil. Tahmin edilen, asal ikizlerin de sonsuz olduğu, ama cevap kesin bilinmiyor!

Matematikçiler, hep soruları genelleme eğilimindedirler. Biz de bu soruyu genelleyelim: Acaba asal üçüzler var mı, varsa kaç tane? Bu sorunun cevabı da çok kolay. Bir tek asal üçüz var: (3, 5, 7).

Bu sonuç kolayca kanıtlanabilir. 3'den büyük bir n sayısı verilsin ve (n, n + 2, n + 4) üçlüsünü inceleyelim. n, n + 2, n + 4 sayılarından tek bir tanesi mutlaka 3'e bölünür. Nasıl?

n sayısının 3'e tam bölünmediği kabul edilirse, n'nin 3'e bölümünden ya 1 kalır ya 2. Eğer 1 kalırsa, n + 2, 3'e bölünür, ve n + 2 asal değildir. Eğer 2 kalırsa n + 4, 3'e bölünür ve n + 4 asal olamaz. n, 3'den büyük olduğunda n, n + 2, n + 4 sayılarından biri asal olamıyor. Dolayısıyla tek asal üçüz vardır.

Benzer sorular üretilebilir. Bir matematik amatörü olan Goldbach'ın 1742'de ünlü matematikçi Euler'e yazdığı bir mektupta ortaya attığı soru gibi: "Herhangi bir çift sayı iki asal sayının toplamı olarak yazılabilir mi?" Kolay ifade edilebilen ve doğal sayılara ait olan bu soru da bugüne kadar çözülememiş! Böyle çift sayılar var elbette: 24 = 5 + 19, 98 = 17 + 79. Ama herhangi bir çift sayı için sorunun cevabı bilinmiyor. Bugün elimizin altında güvenilir ve hızlı hesap yapabilen bilgisayarlar var. Bu tür sorular bilgisayarla çözülemez mi? Bilgisayarlar uygun programlarla matematikçilerin yükünü hafifletecek hesaplamalar yapabiliyorlar. Örneğin bilgisayara, 1 ile 1000 arasındaki çift sayıları, asal sayıların toplamı olarak yazdırabiliriz. Bilgisayar, sonlu kümeler üzerinde hesaplama yapabilir. Ancak, "$10^{24}$'den büyük her çift sayı iki tane asal sayının toplamı olarak yazılabilir" gibi bir sonuç elde edilirse, bilgisayar, geri kalan hesap işini halleder. Sadece bilgisayar yardımıyla Goldbach'ın sorusu çözülemez. Ne kadar güçlü olursa olsun bir bilgisayar, sonlu kümeler dışında hesap yapamaz.

Görüldüğü gibi matematiğin içinden doğduğu doğal sayılarda bile, gene matematikçiler tarafından ortaya atılmış öyle sorular var ki, çözümleri bugün bile bilinemiyor. Daha da önemlisi bu soruları sadece insanlar çözebilir.

Matematik, doğa bilimlerinden farklı ve soyut bir bilimdir. İnsan zekasının en önemli ürünlerinden biri olan matematik, var olabilmek için soruna ihtiyaç duyar. Ama matematikçi bu sorunlardan korkmaz, anlamaya ve çözüm üretmeye çalışır!

Saadet Koç

Kaynaklar
Boyer, C., *A History of Mathematics*, New York, 1968
Davis, J.P., Hersh J.R., *Mathematical Experience*, Boston, 1981
Ore, O., *Invitation to Number Theory*, Washington, 1967