Bir Buluşum Var

2 + 4 + 8 +...+ 64 = [64 – 2/2] . 2= 126
8 + 16 + 32 + ... + 128 = [128 – 8/2] . 2 = 248
.
.
3 + 9 + 27 + 81 = [81 – 3/3] . [3/2] = 120
27 + 81 + ... + 729 = [729 – 27/3] . [3/2] = 1080
.
.
4 + 16 + ... +1024 = [1024 -4/4] . [4/3] = 1364
1024 + 4096 + 16384 = [1638 – 1024 /4] . [4/3] =21504
.
.

Bu kez 457 sayısının kuvvetlerinin toplamını 3. kuvvete kadar bulalım;

457 + 208849 + 95443993
= [95443993 -457/456] . [457/456] = 95653299

1 hariç tüm pozitif tam sayıların pozitif kuvvetlerinden oluşan bir toplama işlemini şu şekilde yazabiliriz:

[son sayı – ilk sayı/ sayının birinci kuvveti] .[sayının birinci kuvveti / sayının birinci kuvveti -1]

Babam bu sayının kendisine x dememi ve ilk sayıya x^m son sayıya da x^n ve

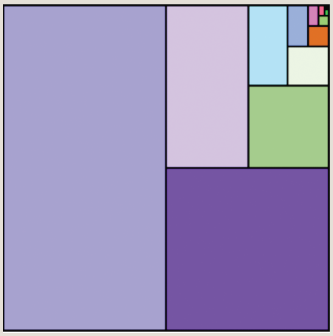
m = 1,2,3...;
n = m +1, m + 2, m + 3,...;

değerleri şeklinde tanımlamamı ve x = 2,3,4,... dememi söyledi ve bu durumda şöyle formülize edebileceğimi gördüm:

$$x^m + x^{m+1} + x^{m+2} + \dots + x^n = [x^n - x^m / x] \cdot [x/(x-1)]$$

Bu formülü 1 hariç tüm pozitif sayılara uyguladığımda doğru sonuç vermektedir. Yayınlarsanız sevinirim. (2000 Evler İlköğretim Okulu 7. sınıf öğrencisiyim)

Mazlum Ferhat Arslan
Seyhan / ADANA



Öğretmen olmama rağmen 7. ya da 8. sınıf sözcüğüne hala alışamadım desem yeridir. 7.sınıfı okumadım aslında, ama ona denk gelen orta 2 vardı benim zamanımda. Müfredat, yıllar içinde değişim gösterse de 7. sınıf yani orta 2, matematikte bilinmeyen yani "x" kavramının gelişmeye başladığı yıl olarak kalmıştır hep! Bunu geliştiren konuysa denklemler başlığı altında işlenir. Başlıca bilinmeyeni "x" ya da "a" olan pek çok basit denklem çözülür o yıl. Bir kere bilinmeyen kullanmanın anlamını çözebilirseniz cebirde kimse tutamaz sizi. Bu başarınız daha sonra analiz konularına da (limit- türev- integral) yansıyacaktır mutlaka.

İnsan ister istemez şaşırıyor bir 7. sınıf öğrencisinin böyle kendi müfredatının ilerisinde konularla uğraşıp üretimler yapmasına. Farklı insanların, ışığını yansıtması için diğerlerini şaşırtması da çok doğal bir olgu değil midir zaten. Mazlum Ferhat arkadaşımıza teşekkür ediyoruz öncelikle, çalışmasını bizimle ve siz okuyucularımızla paylaştığı için. Kendisi lise 2'de, daha doğrusu 10.sınıfta öğreneceği bir konuyu şimdiden keşfetmiş. Bu oldukça umut verici bir durum. Ne de olsa matematik dahisi Gauss da benzer ama daha basit bir formülü (1'den n'e kadar olan sayıların toplam formülünü) henüz ilkokul yıllarında toplama işlemini öğrenir öğrenmez keşfetmiş. Bilinmeyen için dışardan fikir alması oldukça beklendik, Ferhat arkadaşımızın. Çünkü bilinmeye kavramının yani x'in hayatımıza yeni yeni girdiği bir yıl 7. sınıf...

Okuyucumuzun bize ilettiği buluşunu biraz mercek altında inceleyim isterseniz.

Geometrik Seriler

Seri, bir dizinin terimlerinin birbiriyle toplanmasıyla elde edilen sonuçtur. Sonuç bir sayı olabilir ya da olmayabilir. Örneğin dizi: 1,1,1... şeklinde sonsuz tane 1 den oluşuyorsa bu sonsuz sayının toplamı bize bir sayı vermez. Böyle durumlarda seriye ıraksak deriz. Iraksaklık sonsuz sayıyı toplamaktan kaynaklanmaz. Söz gelimi aşağıda örneğini verdiğimiz geometrik seri yakınsaktır:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = \frac{1}{2^1} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \dots = 1$$

Biz sonlu toplamlardan bahsedeceğiz. Okuyucumuz bize sonlu toplam formülü göndermiş. İlk örneği:

2 + 4 + 8 + 16 + 32 + 64 yani

$$2^1 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + 2^5 + 2^6 = \sum_{n=1}^{6} 2^n$$

Bu sonlu toplamın önceden keşfedilmiş bir formülü var. Formül genel anlamıyla şöyle:

$$\sum_{n=0}^{t} r^n = 1 + r^1 + r^2 + \dots + r^t = \frac{1 - r^{t+1}}{1 - r}, r \neq 1,$$

Ferhat arkadaşımızın bize gönderdiği formül daha kullanışlı, çünkü onun formülünde ilk terimi istediğimiz yerden başlatıyoruz, burada olduğu gibi 0'dan başlatmak zorunda olmuyoruz. Toplam kuralları, bunun için de pratik bir kural sunuyor. Eğer m'den n'e kadar olan toplamı bulmak peşindeyseniz, 1'den n'e kadar olan toplamdan 1'den m-1'e kadar olan toplamı çıkartın, geriye istediğiniz kısım kalacaktır:

$$a_0 + a_1 + a_2 + \dots a_{m-1} + a_m + a_{m+1} + \dots + a_n - [a_0 + a_1 + a_2 + \dots a_{m-1}]$$
$$a_m + a_{m+1} + \dots + a_n$$

Bu durumda Ferhat'ın üreteceği formül şu şekilde gelir elimize:

$$\sum_{k=0}^{n} r^k - \sum_{k=0}^{m-1} r^k = \frac{1 - r^{n+1}}{1 - r} - \frac{1 - r^m}{1 - r}$$
$$= \frac{1 - r^{n+1} - 1 + r^m}{1 - r}$$
$$= \frac{r^m - r^{n+1}}{1 - r}$$

Ferhat arkadaşımız gibi yazacak olursak:

$$[r^n - r^m / r] \cdot [r/(r-1)]$$

Madem analize katkı sağlayacağında bahsettik, onu da belirtmeden geçmeyelim. Sonsuz toplam hesaplıyorsanız, formülünde t sonsuza giderken limit almanız yeterli. $\sum_{n=0}^{\infty} r^n = \lim_{t \to \infty} \frac{1 - r^{t+1}}{1 - r}$

Geometrik seriler |r| < 1 için çalışırken yakınsak olduğundan r bu arada bir değerdir ve limiti 0'a gider. Sonuç olarak

$\sum_{n=0}^{\infty} r^n = \frac{1}{1 - r}$ gibi basit ve sadece bir sonuca ulaşırız. Sonsuz tane sayıyı bu yalın formülle hesaplamak gerçekten de hayatı kolaylaştırmıyor mu ne dersiniz?

Nilüfer Karadağ
karadagnilufer@yahoo.com

Eğer siz de kaydettiğiniz önemli bir bulgu olduğunu düşünüyorsanız dergimize gönderin ve onu sizin için değerlendirelim. Adresimiz: TÜBİTAK Bilim ve Teknik Dergisi, Buluşumu Değerlendirin Köşesi, Atatürk Bulvarı No:221 Kavaklıdere-ANKARA