Yuvarlak Sardalyelere Dar Kutular

Paketleme Problemleri

Evlerde "sardalye kutusu" denilen bir oyun oynanır: Bir dolaba en çok kaç kişi tıkılabilir oyunudur bu. Matematikçiler, balık ve insan şekli düzgün olmadığından, bu oyunu dairelerle oynarlar. Örneğin içine 49 süt şişesi sığabilecek en küçük kare prizmanın boyutları nedir? Kenarı 1 olan bir kare verildiğine göre bunun içine birbirine geçmeden sığabilecek 49 özdeş dairenin çapı en fazla kaç olabilir?

Bu iki problem gerçekte eşdeğerdir; birinin çözümü ötekini verir; elbette birisi süt şişelerini başaşağı çevirmezse ya da yan yatırmazsa.

Bu konudaki bütün bilgilerimiz 1960'tan sonra ortaya çıktı. "Kombinatoryel geometri" denen bu alan, şaşılacak kadar karmaşıktır. Örneğin, her birinin taban çapı 1 birim olan 49 süt şişesini, tabanı kare olan bir sandığa sığdırmanın en iyi yolu şişeleri 7x7lik bir kare oluşturacak biçimde dizmektir diye düşünebilirsiniz. Ne kadar açık değil mi? Fakat ne yazık ki yanlış! 1997'de Helsinki Teknoloji Üniversitesi'nden Kari J. Nurmela ve Patrick R. J. Östergard 49 birim çaplı daireyi 7x7lik bir kareden hafifçe daha küçük bir kareye sığdırmanın yolunu buldu.

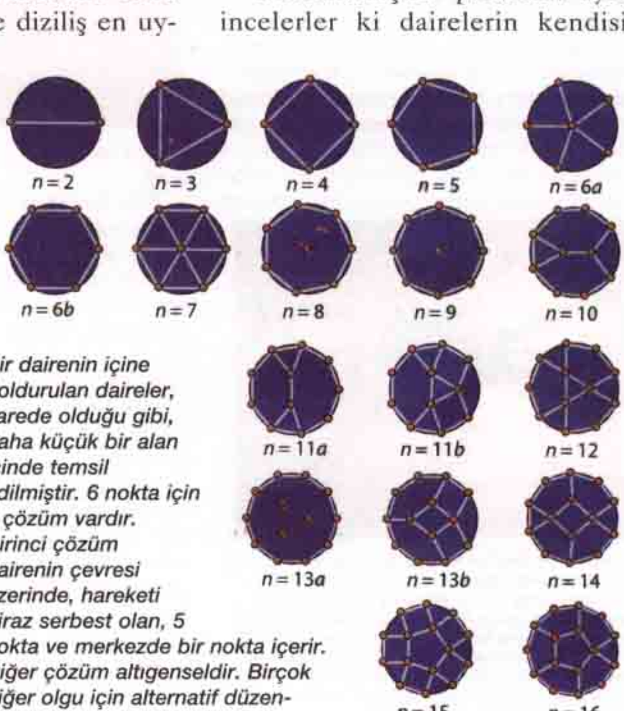
Alman matematikçisi Gerhard Wengerodt 1,4,9,16,25 ve 36 daireyi bir kare içine sığdırmanın en iyi yolunun 1x1, 2x2, 3x3, 4x4, 5x5, ve 6x6 şeklinde kare diziliş olduğunu, fakat 64, 81 ve daha büyük tam kare sayılar için bu basit çözümün geçerli olmadığını kanıtladı.

Daire sayısı yeterince büyük alınırsa kare şeklinde paketleme en uygun paketleme olmaktan çıkar. Sonsuz düzlemde en yoğun paketleme kare değil, altıgen biçimi paketlemedir- bilardo oyununda oyunun başında topların dizilişine benzer bir diziliş (altı eşkenar üçgenin düzgün bir altıgen yapacağını düşünün). Kare şeklindeki sınır tam anlamıyla altıgensel bir dizilişi engeller, bu nedenle daire sayısı küçükse kare diziliş en uygunudur. Sayı büyüyünce sınır etkisi azalır ve altıgensel kafes içine diziliş kareden daha fazla daire kabul eder.

1997 Aralık ayında Utrech Üniversitesinden Hans Melissen "Dairelerle Kaplama ve Paketleme" adlı bir doktora tezi yazdı. Bu problemin en iyi ve tam olarak incelendiği yayın budur. Çapları eşit en fazla sayıda daireyi bir kare içine sıkıştırma problemi ilk kez 1960'ta yayımlandı. Aynı yıl Leo Moser 8 daire için bir çözüm önerdi. Bu, hemen sonra doğrulandı ve farklı sayıda dairelerle bulunan çözümler üzerine yayınlar yapıldı. 1965'te Alberta Üniversitesi'nden Jonathan Schaer (Moser'in savını doğrulayanlardan biri) 9 daireye kadar olan çözümleri yayımladı; 5 daireye kadar olan çözümlerin kolay olduğunu yazdı ve 6 dairenin çözümünü, halen Bell Laboratuvarları Lucent Technologies'de bulunan, Ronald Graham'ın bulduğunu belirtti.

Matematikçiler problemi öyle incelerler ki dairelerin kendisi

Bir kare içindeki özdeş daireler, merkezlere karşılık olan noktalarca temsil edilmiştir; iki nokta arasındaki en küçük uzaklık iki yarıçap toplamı, yani çaptır. Hesap kolaylığı için karenin kenarları, dairenin yarıçapı kadar içeri alınmıştır. Böylece daireleri paketleme problemi, daha küçük bir bölge içinde, noktaların en uygun (optimal) dağılımını bulmaya indirgenir. Bu şekil, bir birim kare içine olası en büyük dairelerin nasıl dizileceğini gösteriyor. Bu düzenlemelerin bazıları, örneğin 13 daireli olanı, yeri tam olarak sabit olmayan "serbest" noktalar içerir.



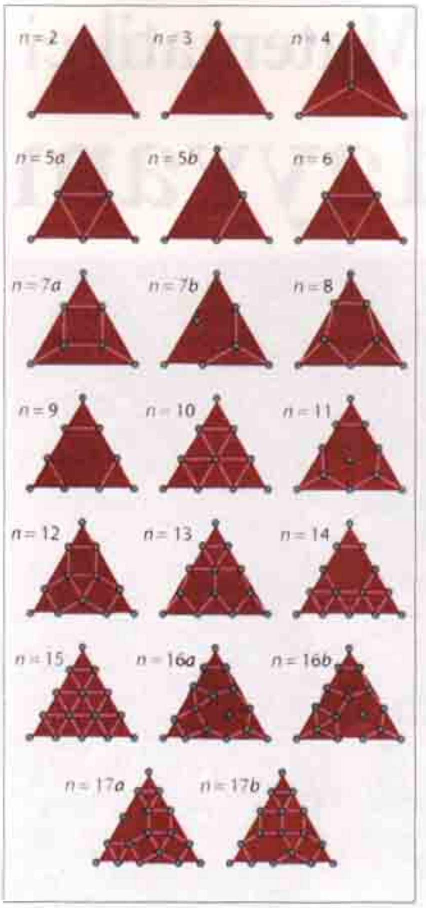
Bir dairenin içine doldurulan daireler, karede olduğu gibi, daha küçük bir alan içinde temsil edilmiştir. 6 nokta için 2 çözüm vardır. Birinci çözüm dairenin çevresi üzerinde, hareketi biraz serbest olan, 5 nokta ve merkezde bir nokta içerir. Diğer çözüm altıgenseldir. Birçok diğer olgu için alternatif düzenlemeler vardır.

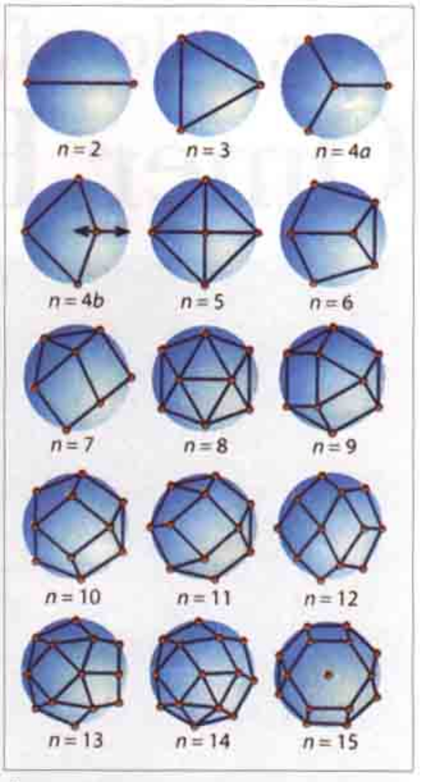
dikkate alınmaz. İki eşit daire birbirine değiyorsa merkezlerinin arasındaki uzaklık bir çaptır. Bir daire karenin bir kenarına değiyorsa (teğetse), onun merkezi, bu doğrudan uzaklığı yarıçap kadar olan bir paralel üzerinde bulunur. Daireleri merkezleriyle temsil edersek problem şu şekli alır: "49 noktayı (merkezi) bir kare içine öyle koyunuz ki her hangi ikisi arasındaki en küçük uzaklık, koşulları sağlayan en büyük uzaklık olsun". Bu durumda dairelerin çapı iki nokta arasındaki en küçük uzaklıktır. Fakat kare orijinal kare değildir, daha küçüktür; karenin kenarları 1 yarıçap kadar içe doğru hareket etmiştir.

Daire yerine merkezini almanın yararı, kavramı basitleştirmesidir. Şekil 1'de 15 daireye kadar olan en uygun (optimal) dizilişler özetlenmiştir. Daha zor bir problem daireleri bir başka daire içine sıkıştırmaktır. Bu konudaki ilk tez Hollanda'da Groningen Üniversitesi'nden Boele L. J. Braaksma'nın 1963'te yazdığı doktora tezidir. Bu tezde Braaksma 8 nokta için optimal çözüm konusunda bir tahminde bulundu; sonra bunu kanıtladıysa da yayımlamadı. Bugün 11 ve daha az nokta için çözümler biliniyor. 12 ve 20 nokta için çözümler sunuldu, fakat kanıtları eksikti.

11 nokta için kanıtı ilk olarak Melissen buldu. Melissen önce daireyi ilginç şekilli bölgelere ayırır ve uzaklıkları yaklaşık değerlerle ölçerek bu bölgelerden bazılarında, daire içine dağıtılacak noktalardan en çok bir tane olabileceğini gösterir. Bu şekilde araştırmacı noktaların dağılımı üzerinde giderek daha fazla "kontrol" kazanır ve 8 noktanın dairenin sınırlarında olması gerektiğini kanıtlar. Yöntem ince bir buluştur; daireyi ustalıkla bölmeye dayanır. Fakat yeterince geneldir ve bazı çeşitleri bu gibi problemlerde, çoğunlukla bilgisayar yardımıyla kullanılabilir.

Bir eşkenar üçgenin içine daireler sıkıştırmak özellikle ilginçtir; çünkü bu, her bilardo oyuncusunun bildiği altıgensel kafesle ilgilidir.





Üçgen sınırı, noktaların altıgen yapısına götürür (solda). Yarım küre, yüzeyinin eğriliği nedeniyle, düzlem bir daireden daha farklı örnek kümeleri oluşturur (üstte).

Topları dizmek için kullanılan tahta ya da plastik çerçeve eşkenar üçgen biçimindedir; içindeki toplarsa altıgensel kafes dizilişi gösterir. Bu tip problemler daire sayısı üçgen sayılarken incelenmeye başlandı. Üçgen sayılar, kendinden önceki doğal sayıların toplamına eşit olan sayılardır 1=0+1, 3=1+2, 6=1+2+3, 10=1+2+3+4, 15=1+2+3+4+5 vb. 1,3,6,10,15.. sayıda daire eşkenar üçgen içine mükemmel bir biçimde dizilebilir.

Altıgensel kafes bütün düzlem için en uygun (optimal) diziliştir. Bu ilk kez 1892'de Axel Thue tarafından kanıtlanmıştır. Üçgen sayıda dairenin eşkenar üçgene en uygun dizilme şekli bilardo topu dizilişidir. Bu doğruysa da kanıtı zordur. Melissen özellikle buna açık bir kanıt bulmuştur. Melissen ayrıca 12 ve daha az noktanın en uygun dizilişini kanıtlamış, 16, 17, 18, 19 ve 20 nokta içinse varsayımlar ileri sürmüştür. Paketleme problemi eğri yüzeylere de uygulanabilir. 1930'da Hollandalı botanikçi Pieter M. L. Tammes bir küre yüzeyine en uygun şekilde kaç daire dizilebileceğini sordu. Melissen, Tammes probleminin değişik bir şeklini sundu; küre yerine yarım küre kullanıyordu. Problemi 6 ve daha az sayılar için kanıtlamış ve 7-15 nokta için tahminlerde bulunmuştur (Meraklı olanlar üç boyutlu hacimleri doldurmayı düşünebilirler).

1985'te A. A. Berezin (Ontario, McMaster Üniversitesi) bir diskin içindeki yüklü parçacıkların en az enerji içeren dizilişlerini Nature dergisinde yayımladı. Bu problem matematikçilerin daire paketleme problemine benzer; çünkü yükler birbirlerini iterler. Enerjiyi minimum yapmak için parçacıkların birbirlerini diskin kenarlarına itecekleri düşünülebilir. Fakat Berezin'in hesapları kanıtladı ki en az enerji durumu bir parçacığın dairenin merkezinde ve diğerlerinin çevresinde sıralanmasıyla olasıdır.

Melissen, Berezin'in sonuçlarını doğruladı. Bu zarif problemlerin çözümünde büyük ilerleme sağlanmıştır.

Stewart, I., *Scientific American*, Şubat 1998
Çeviri: Selçuk Alsan