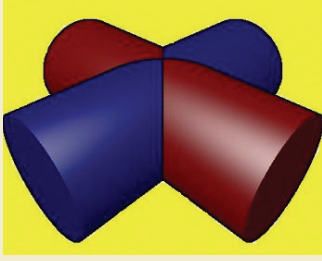




Kesişen Silindirler



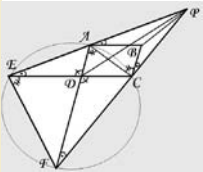
Şekildeki gibi aynı r yarıçapına sahip iki silindir, eksenleri arasındaki açı 90 derece olacak biçimde kesişiyorlar. Bu yeni şekilde iki silindir için de ortak olan bölgenin hacmi acaba kaçtır? (integral kullanılmayan basit bir çözüm yolu bulmanız mümkün)

Meraklı Arkadaş

En önemli ortak özellikleri matematik olan A ve B adındaki iki arkadaş arasında şöyle bir diyalog geçiyor: A: "Dün yanında gördüğüm 3 kişinin yaşları çarpımı kaçtı?", B: "2450", A: "Peki yaşları toplamı?", B: "Senin yaşına eşit", A: "Hala yaşlarını söyleyemiyorum. Herhangi biri senin yaşında ya da daha yaşlı mı?", B: "Hayır", A: "Tamam, şimdi buldum!". Acaba 3 kişinin, A'nın ve B'nin yaşları kaçtır?

Geçen Ayın Çözümleri

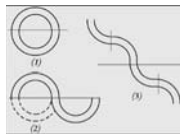
Paralelkenarda Açı



Öncelikle paralelkenarı şekildedeki gibi tamamlayalım ve eşit açılı aynı sembollerle işaretleyelim. Bunun ardından ilk $ADE \sim CDF$ (açı-açı-açı) üçgen benzerliğini, daha sonra $ADC \sim EDF$ (k-a-k) üçgen benzerliğini elde edebiliriz. Soruda verilen PAB açısı = PCB açısı bilgisini kullanarak $EPF \sim CPA$ (a-a-a) benzerliğine ulaşırız. $AD = BC$ olduğuna göre benzerlik özelliğinden $PC/PE = AC/FE = AD/ED = BC/ED$ yazılabilir. Bu da PCB ile PED üçgenlerinin de benzer üçgenler olduğunu gösterir ve soruda ki PED açısı = PCB açısı eşitliğini ispatlar.

Önce Düşünme Zamanı

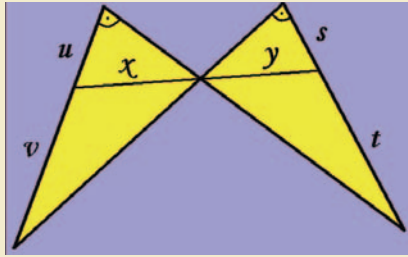
1 numaralı şekil olarak gösterilen toroidi ilk olarak tam ortadan ikiye bölelim ve alttaki parçayı yan kaydırarak uç uca ekleyelim. Şimdi de elde ettiğimiz 2 numaralı şekildedeki iki parçayı yine tam ortadan ayrı ayrı bölelim ve şekil 3'teki gibi uç uca ekleyelim. Bu işi sonsuza kadar yaptığımızda tüm eğrilik kaybolur ve en sonunda elimizde bir silindir kalır. Bu silindirin yüksekliği $2\pi(a+b)/2 = \pi(a+b)$ ve yarıçapı r olacaktır. O halde toroidin hacmi = $\pi r^2 \cdot \pi(a+b) = \pi^2 r^2(a+b)$ 'dir.



Zam Teklifi

Biraz "uyanık" olarak da bilinen patronunuz sizi yanına çağırıyor ve zam konusunda bir tercih yapmanızı istiyor. Şu anki yıllık kazancınız $10\,000$ YTL olsun. Yeni yıldan sonra geçerli olacak bu sitemde ya her yarı yıl ve yıl başlarında o yarıyıldan aldığımız paranın 50 YTL fazlasını alacaksınız ya da sadece yıl başlarında yıllık ücretinize 200 YTL zam yapılacak. Hangi seçeneği tercih edersiniz? Sizin yerinizde olsam cevabı vermeden önce bir daha düşünürüm.

Geometrik Eşitlik



Şekilde aynı işaretlerle işaretlenmiş tepe açıları birbirine eşit ise x, y, u, v, s ve t olarak adlandırılan doğru parçaları arasında şu eşitliğin geçerli olduğunu gösteriniz: $x^2/y^2 = (u \cdot v)/(s \cdot t)$

Las Vegas'ta Olasılık

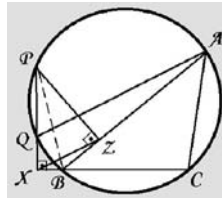
Katılım ücretini bulmak için sorunun da dediği gibi ortalama kazanma miktarını bulmamız gerekiyor. Bu ortalama değer (E), her bir ihtimalin olasılığı ile o olasılığın kazancının çarpımının toplamına eşittir. Yani $E = \sum x \cdot P(x)$ olasılık x kazanç:

$$E = \left[\sum_{N=0}^{10} \frac{1}{2^{N+1}} x 2^N \right] + \sum_{N=11}^{\infty} \frac{1}{2^{N+1}} x 2^{10}$$

Casino en fazla $1024=2^{10}$ YTL verdiği için arka arkaya 10 yazı gelinceye kadarki kısmı tüm toplam formülünden ayırarak parantez içinde gösterdik. Eğer toplam formül özelliklerini kullanırsak $E = 11/2 + 1/2 = 6$ olduğunu buluruz. O halde oyuna katılım ücreti 6 YTL'dir.

Yaz Sorusu

P noktası B üzerinde değilkenki durumda PB doğru parçasını çap kabul eden hayali bir çember çizelim. Dikkat ederseniz çapı gören PXB ve PZB açıları 90 derecedir. O halde X ve Z köşeleri hayali çemberimiz üzerinde olmalıdır. Bu durumda hayali çemberde aynı yayı gören PBZ ve PXZ açıları eşit olur. Buna ek olarak büyük çemberde aynı yayı gören PBZ ve PQA açıları da eşittir. Yani PXB açısı = PQA açısıdır ki bu da QA ile XZ'nin paralel olduğunu kanıtlamaya yeter.

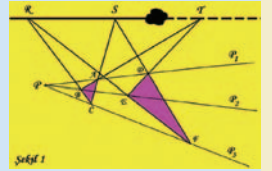


Matematiğin Şaşırtan Yüzü

ÇİT

Bu ay köşemizde ağustos sıcaklığının yanı sıra bir de karşılaştığı içinden çıkılmaz sorun nedeniyle iyice bunalan bir çiftçiye yardım edeceğiz. Öncelikle sorunun ne olduğunu kısaca anlatalım. Kavurucu sıcakların peşi sıra geldiği günlerden birinde çiftçi, tarlasının kusursuz bir doğru parçası olan bir kenarına çit çekmek için işe koyulur. Çiti kusursuz bir doğrultuda çekebilmek için elindeki tek aracı cetvelidir (bu cetvel sayesinde çiftçinin sonsuza kadar bir doğru çizebileceğini varsayıyoruz). Bir yandan türküsünü yakıp bir yandan çitini çektiği sırada farkeder ki tam çit doğrultusunda kocaman bir kaya bulunmaktadır. Kayayı yerinden kaldırmaya gücü yetmeyeceğine göre çiti döşemeye kayanın öteki tarafından aynı doğrultuda devam etmesi gerekir. Peki ama bunu çiftçimiz nasıl yapacaktır?

Bu sorunun çözümü için iki yöntemden bahsedeceğiz. İlk olarak çözümü Desargues Teoremi'ni kullanarak yapalım. Şekil 1'deki RST doğrultusu çitin döşeneceği doğrultuyu temsil etsin, S ile T arasındaki siyah kütle de kayayı. Teoreme göre ilk olarak kayaya varmadan önce rasgele R ve S noktalarını seçiyoruz. Daha sonra rasgele bir P noktası alıyoruz ve bu noktadan geçen yine rasgele P_1, P_2, P_3 doğrularını çiziyoruz. Önce RC ve RF'yi ardından da SC ve SF doğru parçalarını çiziyoruz. Bu çizimler sayesinde ABC ve DEF üçgenleri ortaya çıkmış oldu. Üçgenlerin AB ve DE kenarlarının kesişim noktası yine çitin çekileceği doğrultuda olacaktır. R ve S'den farklı 2 nokta olarak aynı yöntemle T'den farklı bir başka nokta bulmamız çit doğrultusunu elde etmek için yeterlidir.



İkinci çözüm yöntemi ise "Wilkes-Gordon çizimi" olarak da bilinen son derece zarif bir yöntem. İlk önce çizgi üzerinde bir P noktası seçiyoruz ve bu noktadan geçen rasgele P_1 ve P_3 doğrularını çiziyoruz. Çit doğrultusu olan P_2 ile R noktasında kesişecek şekilde P_1 ve P_3 arasına 2 doğru parçası yerleştiriyoruz. Bu doğru parçalarının P_1 ve P_3 'ü kestiği noktaların yine rasgele olduğunu hatırlatmakta fayda var. Bu noktaları Şekil 2'deki gibi birleştirdiğimizde O noktasını elde etmiş oluruz. Artık işimiz çok kolay. Bu O noktasından çizilen 2 doğrunun P_1 ve P_3 ile kesişimi sonucu oluşan dörtgenin köşegenlerinin kesim noktası istediğimiz gibi çitlerin doğrultusunda olacaktır. Bu yöntemi kullanarak S ve T gibi iki farklı nokta bulmamız çitin doğrultusunu kusursuz bir keskinlikle tekrar elde etmemizi sağlayacaktır. Artık çiftçimiz türküsünü yakıp işine devam edebilir.

