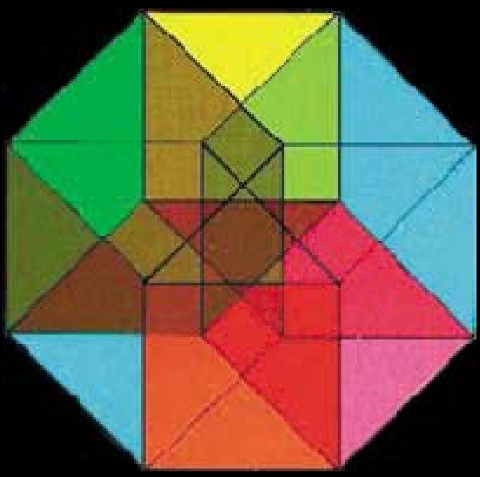
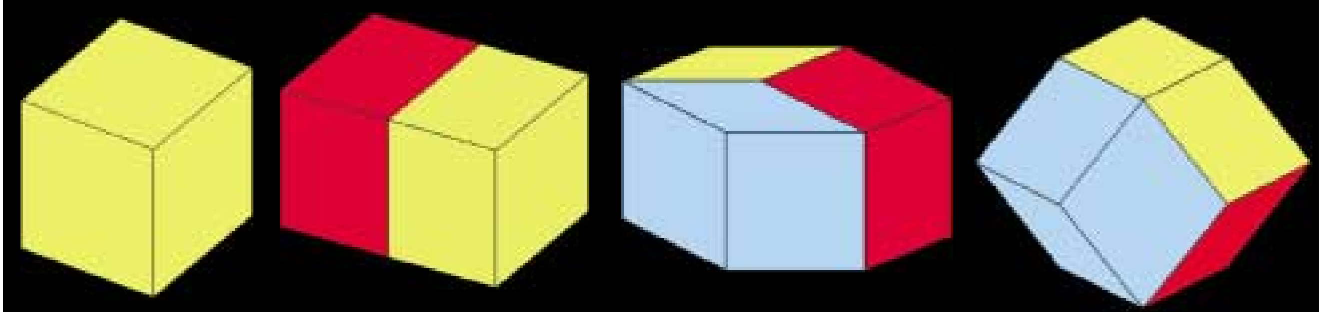


DÖRT BOYUTLU KÜP

VE GÖRÜNÜŞLERİ



Hiçbir zaman görme şansımızın olmadığı 4 boyutlu birim şeklin (Tesseract, Hypercube, Octaholohedron ya da 8-Cell) bakma şansımızın da olmadığı 4 boyutlu ortamdan görünüşlerini oluşturmak size imkansız gelebilir, ama mümkündür. Öncelikle şunu söylemem gerekir ki, 4 boyutlu birim şeklin görünüşlerini 3 boyutlu ortam içinde elle tutulabilir şekilde oluşturabilmemiz için onu görmemize gerek yok; dolayısıyla 4 boyutlu ortamdan bakmamıza da gerek yok. İki boyutlu ortam içinde, iki boyutlu varlıkların yaşadığını hayal edelim. Burada yapmaya çalıştığımız olayı iki boyutlu varlıkların bizim görmüş olduğumuz küpün görünüşlerini oluşturmaya çalışmalarına benzetebiliriz. Her şey aynı, sadece 1 boyut eksik.

4 boyutlu birim şeklin görünüşlerini oluşturabilmemiz için aşağıdaki iki kuraldan yararlanacağız. Önce bu iki kural 1, 2 ve 3 boyutlu birim şekillere uygulanacak, daha sonra da 4 boyutlu birim şekle uygulanıp görünüşleri çıkartılacak.

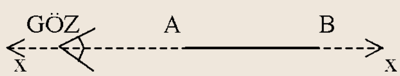
Kural 1: n boyutlu birim şeklin sınırı, tüm alt boyutlarının çok sayıdaki birim şekillerinden oluşur (köşe noktası, kenar, yüzey....gibi).

Kural 2: Görülmeyen Köşe Noktası Kuralı: n boyutlu birim şeklin sınırında, n boyutlu ortamda değişik sayılarda alt boyutların birim şekillerinin görülebildiği, 2^{n-1}, 2^{n-2}, ... 2^{n-n} kadar köşe noktasının görülmediği n tane farklı görünüşü vardır. Görülmeyen köşe noktası ya da noktalara bağlı n boyutlu birim şeklin sınırındaki alt boyutların, birim şekilleri de görülmez.

1 Boyutlu Birim Şekil (Doğru Parçası):

Kural 1: 1 boyutlu birim şeklin sınırı 2 köşe noktasından (0D) oluşur.

Kural 2: 1 boyutlu birim şeklin sınırında, 1 boyutlu ortamda 1 köşe noktasının görülmediği 1 tane görünüşü vardır. Uzunluk da görülmeyen köşe noktasına bağlı olacağı için görülmez.



Görülen
. A
Görülmeyen B noktasına bağlı AB doğru parçası da görülmez.

4 Boyutlu Birim Şekil

Kural 1: 4 boyutlu birim şeklin sınırı 16 köşe noktası (0D), 32 kenar (1D), 24 kare şeklindeki yüzeyden (2D) ve 8 küp şeklindeki hacimden (3D) oluşur.

4 ve daha üst boyutların birim şekillerinin sınırındaki alt boyutların birim şekil sayılarını bulmanın bilinen 2 pratik yolu vardır, bunlardan birincisi tablo üstünde işleyen bir kural, diğeri ise bir formüldür.

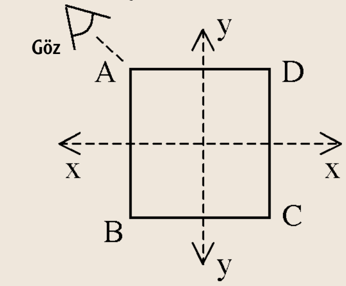
Tablo üstünde işleyen kural: Bu kuralın mantığını A=2B+C gibi düşünebiliriz, burada bulmak istediğimiz

2 Boyutlu Birim Şekil (Kare)

Kural 1: 2 boyutlu birim şeklin sınırı 4 köşe noktası (0D) ve 4 kenardan (1D) oluşur.

Kural 2: 2 boyutlu birim şeklin sınırında 2 boyutlu ortamda değişik sayılarda alt boyutların birim şekillerinin görülebildiği 1 ve 2 köşe noktasının görülmediği 2 tane farklı görünüşü vardır. Bu görünüşlerde görülmeyen köşe noktası ya da noktalarına bağlı kenarlarda görülmez. Yüzey de görülmeyen köşe noktası ya da noktalarına bağlı olacağı için görülmez.

Görülmeyen 1 Köşe Noktası (C)

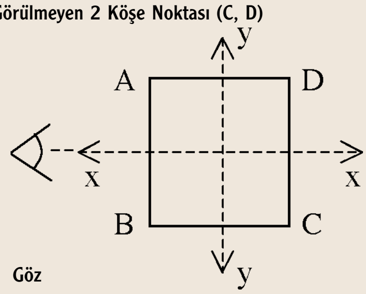


Görülen

D A B

Görülmeyen C köşe noktasına bağlı olan CB ve CD kenarları ve ABCD yüzeyi de görülmez.

Görülmeyen 2 Köşe Noktası (C, D)



Görülen

A B

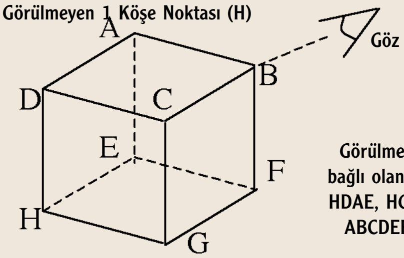
Görülmeyen C ve D köşe noktalarına bağlı olan DA, CB ve CD kenarları ve ABCD yüzeyi de görülmez.

3 Boyutlu Birim Şekil (Küp):

Kural 1: 3 boyutlu birim şeklin sınırı 8 köşe noktası (0D), 12 kenar (1D) ve 6 kare şeklindeki yüzeyden (2D) oluşur.

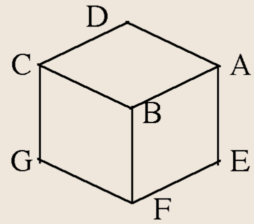
Kural 2: 3 boyutlu birim şeklin (küpün) sınırında 3 boyutlu ortamda değişik sayılarda alt boyutların birim şekillerinin görülebildiği 1, 2 ve 4 köşe noktasının görülmediği 3 tane farklı görünüşü vardır. Bu görünüşlerde görülmeyen köşe noktası ya da noktalarına bağlı kenarlar ve yüzeyler de görülmez. Hacim de görülmeyen köşe noktası ya da noktalarına bağlı olacağı için görülmez.

Görülmeyen 1 Köşe Noktası (H)

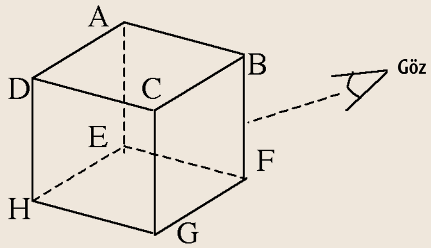


Görülmeyen H köşe noktasına bağlı olan HE, HD, HG kenarları, HDAE, HGCD, HGFE yüzeyleri ve ABCDEFGH hacmi görülmez.

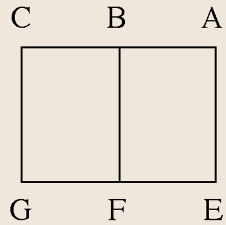
Görülen



Görülmeyen 2 Köşe Noktası (D, H)

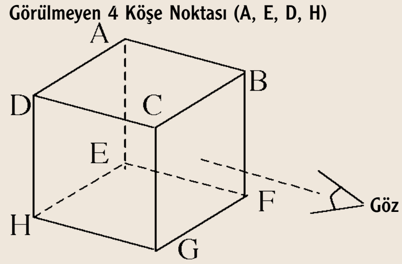


Görülen

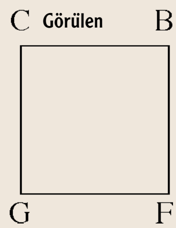


Görülmeyen A, E, D, H köşe noktasına bağlı olan EH, DH, HG, AD, DC, AB, AE, EF, kenarları, AEHD, DHGC, HEFG, DABC, EABF yüzeyleri ve ABCDEFGH hacmi görülmez.

Görülmeyen 4 Köşe Noktası (A, E, D, H)



Görülen



Görülmeyen A, E, D, H köşe noktasına bağlı olan EH, DH, HG, AD, DC, AB, AE, EF, kenarları, AEHD, DHGC, HEFG, DABC, EABF yüzeyleri ve ABCDEFGH hacmi görülmez.

değer A; A'nın üstündeki değer B; A'nın sol üstündeki değer ise C dir. Bu işlem sonsuza kadar devam ettirilebilir. Bkz. Tablo-1

	0D (köşe)	1D (kenar)	2D (yüzey)	3D (hacim)	4D
Nokta	1				
Doğru parçası	2	1			
Kare	4	4	1		
Küp	8	12	6	1	
Tesseract	16	32	24	8	1

Tablo 1

Örnek: Küpün kenar sayısını bulmak istiyorsak, karenin kenar sayısını 2 ile çarpıp çıkan sonuca karenin köşe nokta sayısını eklemeliyiz. 4x2+4=12

Formül-1: Aynı sonuçlara, 2^{n-m} n!/m!(n-m)! formülünü kullanarak da ulaşabiliriz.

Örnek: Küpün (3D) kenar (1D) sayısını bulmak istiyorsanız. n=3, m=1 dir.

2^{3-1} x3!/1!x(3-1)! = 4x6/1x2 = 24/2 = 12 dir.

Kural 2: 4 boyutlu birim şeklin sınırında 4 boyutlu ortamda değişik sayılarda alt boyut birim şekillerinin görülebildiği 1, 2, 4 ve 8 köşe noktasının görülmediği 4 tane farklı görünüşü vardır. Bu görünüşlerde görülmeyen köşe noktası ya da noktalarına bağlı kenarlar ve yüzeyler de görülmez. 4

Formül-2 2^{n-m} n!/m!(n-m)! - n!/m!(n-m)! = (2^{n-m} -1)n!/m!(n-m)!

Örnek: 4 boyutlu birim şeklin, 4 boyutlu ortamdan 1 köşe noktasının görülmediği durumda görülen,

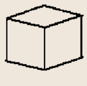
Köşe nokta sayısı (0D) n=4 m=0 (2^{4-0} –1).4! / 0!.(4-0)! = (16-1).24 / 1x24=15

Kenar sayısı (1D) n=4 m=1 (2^{4-1} –1).4! / 1!.(4-1)! = (8-1).24 / 1x6=28

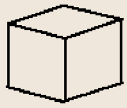
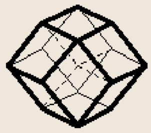
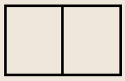
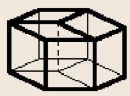
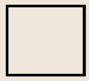
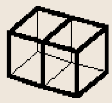
Yüzey sayısı (2D) n=4 m=2 (2^{4-2} –1).4! / 2!.(4-2)! = (4-1).24 / 2x2=18

Hacim sayısı (3D) n=4 m=3 (2^{4-3} –1).4! / 3!.(4-3)! = (2-1).24 / 6x1=4

Tablo 2 n boyutlu birim şeklin n boyutlu ortamdan 1 köşe noktasının görülmediği görünüşleri

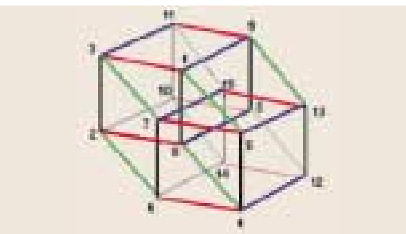
Görülmeyen Köşe Nokta Sayısı	1-1		2-2			3-3				4-4				
		0D (Nokta)		0D (Nokta)	1D (Kenar)		0D (Nokta)	1D (Kenar)	2D (Yüzey)		0D (Nokta)	1D (Kenar)	2D (Yüzey)	3D (Hacim)
1	·	1		3	2		7	9	3		15	28	18	4

Tablo 3- **n boyutlu birim şeklin n boyutlu ortamdan görünüşleri**

Görülmeyen Köşe Nokta Sayısı	1-1		2-2			3-3				4-4				
		0D (Nokta)		0D (Nokta)	1D (Kenar)		0D (Nokta)	1D (Kenar)	2D (Yüzey)		0D (Nokta)	1D (Kenar)	2D (Yüzey)	3D (Hadm)
1		1		3	2		7	9	3		15	28	18	4
2				2	1		6	7	2		14	25	15	3
4							4	4	1		12	20	11	2
8											8	12	6	1

boyutlu birim de, görülmeyen köşe noktasına bağlı olacağı için görülmez.

4 Boyutlu Birim Şeklin Görünüşlerinin Oluşturulması:



Önce 4 boyutlu birim şeklin, 1 köşe noktasının görülmediği bakış doğrultusunda görülen alt boyut birim şekillerin sayısını bulacağız. Sonra da Tablo-1 de anlatılan (A=2B+C) kuralını kullanarak diğer 3 görüşünde görülen alt boyutların birim şekil sayılarını ulaşacağız.

n boyutlu birim şeklin 1 köşe noktasından geçen sınırındaki m boyutlu alt boyutlara ait birim şekil sayısını n'in m'li kombinasyon formülünden bulabiliriz. Dolayısıyla n boyutlu birim şeklin 1 köşe noktasının görülmediği durumda görülen alt boyut birim şekil sayısını bulmak için formül 2'yi kullanabiliriz.

Tablo-3 de görülen eğik oklar doğrultusunda, daha önce anlatılan Tablo-1 üstünde işleyen kuralı (A=2B+C) kullanarak, 4 boyutlu birim şeklin 4 boyutlu ortamdaki 2, 4 ve 8 köşe noktalarının görülmediği görünüşlerine ulaşabiliriz.

Örnek: 4 boyutlu birim şeklin 2 köşe noktasının görülmediği görünüşü:

3 boyutlu ortamdan küpün 1 köşe noktasının görülmediği görünüşünden, 4 boyutlu ortamdan 4 boyutlu birim şeklin 2 köşe noktasının görülmediği görünüşünü çıkartalım.

Köşe nokta sayısı(0D)	2x7+0=14
Kenar sayısı (1D)	2x9+7=25
Yüzey sayısı (2D)	2x3+9=15
Hacim sayısı (3D)	2x0+3=3

Uyarı: 2 boyutlu varlık küpün görünüşlerini kendi 2 boyutlu uzayının içinde oluşturmayı başarmış olsaydı bile, o görünüşleri yüzey görme şansı olmadığı için hiçbir zaman bizim gördüğümüz gibi görme şansı olmayacaktı. Aynı şekilde bizlerin de hacim görme şansımız olmadığı için, elimizde 4 boyutlu birim şeklin görünüşlerini tuttuğumuz halde, bu şekillere baktığımızda gördüğümüz maalesef 4 boyutlu birim şeklin 4 boyutlu ortamdan görünüşleri olmayacaktır (bazı köşe noktaları, kenarlar ve yüzeyler şekillerin arkasında ya da içinde ve tüm hacimler şeklin içinde kalacaktır).

Ayrıca, 4 boyutlu ortamdan 4 boyutlu yuvarlak şeklin görünüşünün bir küre olduğunu da eklemem gerekir. 2 boyutlu yuvarlak şekil olan daire, sonsuz büyüklükte değil ama sınırsız bir yüzeye sahip olan 3 boyutlu yuvarlak şekil olan kürenin tek görünüşü olduğu gibi, 3 boyutlu yuvarlak şekil olan kürede sonsuz büyüklükte değil ama sınırsız bir hacme sahip olan 4 boyutlu yuvarlak şeklin, 4 boyutlu ortamdan tek görünüşüdür.

Mustafa Sancak