HER DOĞAL SAYI İLGİNÇTİR!

Bir Matematikçi ve Bir Dahi

"Putney'deki bir hastanede ölüm döşeğinde yatarken Hardy, Ramanujan'ı ziyarete giderdi. Taksi plaka numarasıyla ilgili olay, bu ziyaretlerin birinde gerçekleşti. Hardy o gün de her zamanki ulaşım aracı olan taksiyle gitmişti. Ramanujan'ın yattığı odaya girdi. Hardy konuşmaya başlamakta her zamanki beceriksizliğiyle, muhtemelen daha selamlaşmadan ve mutlaka ilk cümle olarak 'Geldiğim taksinin numarası 1729'du. Bana çok alelade bir sayı gibi geldi' dedi. Ramanujan'ın buna yanıtı şu oldu: "Hayır Hardy! Hayır Hardy! Çok ilginç bir sayı. İki küpün toplamı olarak iki ayrı şekilde ifade edilebilen en küçük sayı.'" (G. H. Hardy, Bir Matematikçinin Savunması, s. 24, TÜBİTAK Popüler Bilim Kitapları)

İngiliz matematikçi G.H. Hardy ile, kendisine, matematiksel çalışmalarını içeren bir mektupla ulaşan Ramanujan isimli Hintli bir dahi arasında geçen bu diyalog 1729 ($= 1^3 + 12^3 = 9^3 + 10^3$) sayısının *ilginç* olduğuna dair bir örnek. Ama yalnızca 1729 sayısı değil, tüm doğal sayılar ilginç. Üstelik bu öylesine söylenmiş bir cümle değil; bir teorem, yani ispatı olan bir ifade!

İlginç

İlginç sözcüğüyle bu kadar ilgilenince, bir tanım gerektirmesi oldukça beklendik bir durum. Ama bir süre sonra kendiliğinden ortaya çıkacağı için tanımı yapmak aslında gereksiz. 1729 örneğinin üzerine, şimdilik şunun farkındayız ki ilginç olan en az bir doğal sayı var. Diyelim ki ilginç olanların yanısıra olmayan doğal sayılar da var. Bu kümenin, doğal sayıların alt kümesi olmasından dolayı en küçük elemanı vardır (bu, doğal sayıların her alt kümesi için varolan bir özellik!). Bu elemanı 'k' ile ifade edelim. k sayısı 'ilginç olmayan en küçük sayı' olduğu için *ilginç* bir sayı olacaktır ve bu özelliğiyle ilginç olan sayılar arasına girecektir. Bu durum bir çelişkiye yol açacaktır. Bu böyle devam edeceğinden ilginç olmayan doğal sayıların mevcut olmadığı, yani her doğal sayının ilginç olduğu ispatlanmış olacaktır. Peki ya bir sayı hangi özelliğinden dolayı ilginç olarak ilan edilir? Bu sorunun tek bir cevabı yok elbette. Bir sayının ilginç olmak için pek çok nedeni olabilir.

Matematik tarihinin başlangıcından günümüze kadar sayılara pek çok özellik yüklenmiş, üstelik bu özelliklerin birçoğu da rastlantıyla bulunmuş. Bir sayı ile farkedilip tanımlanan özellik, beraberinde önce ona uyan diğer sayıları aramaya ve ardından da bu tür sayıların davranışlarını (doğal sayılar içindeki dağılımlarını) incelemeye itmiş matematikçileri.

Meraklılar, ilk 9999 sayının neden ilginç olduğuna dair bir listeyi http://www.stetson.edu/~efriedma/numbers.html adresinde bulabilirler. Bu listeden sizin için birkaç örnek seçtik. Eğer aralardaki boşlukları doldurmayı denerseniz şunu aklınızdan çıkarmayın: bir doğal sayıyı ilginç yapan, birden fazla neden olabilir.

0: toplamada etkisiz eleman
1: çarpmada etkisiz eleman
2: tek çift asal
3: içinde yaşadığımız uzayın boyut sayısı
6: en küçük mükemmel sayı
10: kullandığımız sayı sisteminin tabanı
18: basamaklarının toplamının 2 katı olan tek sayı
28: ikinci mükemmel sayı
31: Mersenne asalı
42: beşinci Catalan Sayısı
45: bir Kaprekar sayısı
67: 5 ve 6 tabanındaki en küçük Palindromik sayı
94: bir Smith sayısı
145: 1! + 4! + 5!
151: bir palindromik asal sayı
175: $1^1 + 7^2 + 5^3$
198: 11 + 99 + 88.
220: en küçük dost sayı
227: Fermat asalı
347: bir Friedman sayısı
3413: $1^1 + 2^2 + 3^3 + 4^4 + 5^5$

Bu listede geçen ve *ilginç* olarak anılan Friedman, palindromic, Kaprekar, Mersenne, Smith gibi özellikleri tanımladığımızda 'ilginç' kelimesinin sırrı kendiliğinden çözülecek.

Smith Sayıları

1982 yılında, matematikçi Albert Wilansky, üvey kardeşi H. Smith'i ararken çevirdiği telefon numarasının (493-7775) *ilginç* bir özelliğe sahip olduğunu farketti. Telefon numarasının basamaklarının sayı değerlerinin toplamı, yine aynı numaranın tüm asal çarpanlarının sayı değerlerinin toplamına eşitti:

asal çarpanlar:
4937775=3.5.5.65837
sayı değerleri toplamı:
4+9+3+7+7+7+5=3+5+5+6+5+8+3+7

Farkettiği bulgu karşısında hayrete düşen Wilansky bu buluşunu, telefon ettiği üvey kardeşine ithaf ederek bu ve bu tür sayıları Smith sayıları olarak adlandırdı. İlk bakışta 4937775 gibi 7 basamaklı bir sayının asal çarpanlarını bulmak ve adı geçen özelliği farkedebilmek için aranızın sayılarla bir hayli iyi olması gerekiyor olsa da, her asalın Smith sayısı özelliğini taşıdığını farketmek için bu kadar yetenekli olmaya gerek yok. Çünkü zaten asal sayının asal çarpanı kendisidir ve sayı değerleri toplamı eşitliği doğal bir sonuçtur. Bu nedenle Wilansky, asal sayıları bir Smith sayısı olarak saymamış ve tanımı bu yönde yapmıştı.

Asal sayı tanımı yapıldıktan sonra insanoğlunun ilk olarak peşinde koştuğu sorulardan biri, asalların sonsuz tane olup olmadığıydı. Burada, tarih tekerrürden ibarettir deyimini kullanmak yerinde olur belki de. Smith sayılarının sonsuz tane olduğunun ispatı 5 yıl sonra, 1987'de Mc. Daniel tarafından yapıldı.

Kaprekar Sayıları

Hint matematikçi D. R. Kaprekar 1949'da şöyle bir gözlem yaptı: Öyle bir n basamaklı t sayısı olsun ki bu sayının karesini alıp (t^2) sağdaki n basamağı solda kalan n veya n-1 basamağa ekleyince sonuç yine t sayısını versin. Bu özelliği sağlayan sayılar da Kaprekar sayıları olarak adlandılıyor. İlk örnek olarak listemizde yeralan 45 sayısını inceleyelim:
45, 2 basamaklı bir sayı
45^2 = 2025 sağdan 2 basamak 25, soldan 2 basamak 20. Bu ikisinin toplamı da 20 + 25 = 45 yani sayının kendisi.
Diğer bir örnek 17344^2 = 300814336, sağdan 5 basamak ve kalan 4 basamağın toplamı: 3008 + 14336 = 17344. Gerçekten *ilginç* değil mi?

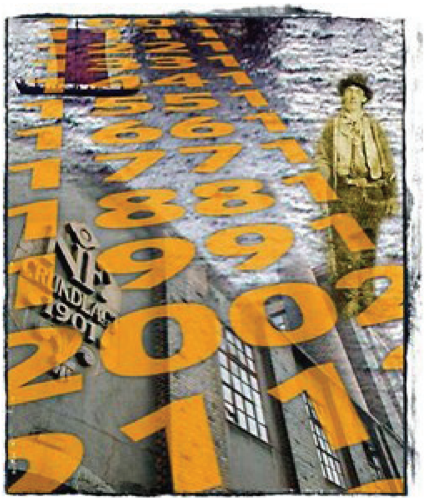
Hazır Kaprekar sayılarından söz açmışken bu sayılarla pek ilgisi olmayan, ama adını yine aynı kaynaktan alan Kaprekar sabitinden bahsetmeden geçmek olmaz.

Bir Sayı Tut

Bir sayı tutmakla başladığımız oyunlar hep *ilginç* bir sona ulaştırır bizi; hesaplarda bir hata yapmazsak tabii. Önce 4 basamaklı bir sayı tutalım: 4564.
Sonra onu basamaklarının sayı değerlerinin artış ve azalışına göre sıralayıp yeni iki sayı üretelim: 6544 ve 4456
Şimdi büyükten küçüğü çıkaralım: 6544 – 4456 = 2088
Aynı işlemleri çıkan sayı için de tekrarlayalım: 8820 – 0288 = 8532
Ve yine: 8532 – 2358 = 6174
Son bir deneme: 7641 – 1467 = 6174

Kaprekar sabiti 6174 olarak bilinir. Herhangi 4 basamaklı bir sayı için bu işlemler serisini (en fazla 7 kez) yaptığınızda ya 0 sonucuna ya da 6174 sonucuna ulaşıp kısır bir döngüye girersiniz. Kaprekar'ın 1949'da yaptığı bu gözlemden sonra matematikçilerin neyin peşinden koştuğunu tahmin etmek artık zor değil. 4 basamaklı sayılar haricindekiler için bu işlemler serisi nasıl sonuç veriyor? Bunun yanıtı şöyle: Sonuç ya 0 oluyor, ya sabit bir sayıya ulaşılıyor ya da kısır bir döngüye giriliyor. Örneğin 6 basamaklılar için 549945 sabit sayısına ulaşılıyor ama 5 basamaklılar için birden fazla sabit mevcut. Bunların yanısıra kaç basamaklı bir sayı için en fazla kaç işlem yapıldığı da araştırmaların merak konusu.

Palindromik Sayılar



Kapak, kütük, sus, yay, kepek sözcükleri *ilginç* bir ortak özellikle dikkat çekiyor: Düzden ve tersten okunduğunda aynılar. Onlar ilginç olur da aynı özelliği taşıyan sayılar ilginç olmaz mı? Palindromik bir sayı düzden ve tersten okunduğunda aynı olan sayılardır:

1991, 10001, 12621, 79388397.

Cebirsel operasyonlarla palindromik sayıları üretebilme meselesi de bu kavramın merak uyandıran konularından biri. Bu yollardan biri, herhangi bir sayıyı düzden ve tersten yazıp palindrom üretene kadar toplamak:
13 + 31 = 44;
129 + 921 = 1050 tekrar: 1050 + 501 = 1551

Şirin görüntüleriyle zararsız görünen bu sayıların sizi çıldırtan bir probleme dönüşmesi mümkün mü dersiniz? Örneğin 98'i bir palindrom yapmak için bu toplama işlemlerini 24 kez devam ettirmeniz gerekecetir. Olur ya, palindrom yapmak için 196 sayısını seçtiniz. O zaman ömrünüzü harcamanız gerekebilir! Halbuki 196'ya varana kadar tüm sayılar kolayca palindrom oluyor. Bugüne kadar milyonlarca işlem uygulanmış olan (bilgisayarlar sağolsun) 196'nın bir palindrom olmaya niyeti yok gibi gözüküyor. 196 gibi davranan başka sayılar da mevcut. Şimdilik her sayının palindrom üretemeyeceği ya da üreteceği meselesi, bir ispata kavuşmuş değil.

Ve Diğerleri

Burada daha fazla ilginç sayı türünden bahsetmek isterdik ama Fermat'nın da dediği gibi "sayfada yer kalmadı!". Yine de bahsettiğimiz diğer türlerin tanımlarını verebiliriz:

Bir sayıyı kendi basamakları ve cebirsel operasyonları kullanarak tekrar elde edebiliyorsak, bunlara Friedman sayıları diyoruz.
Örneğin:
$1827 = 21 \times 87$; $2503 = 50^2 + 3$; $625 = 5^{6-2}$

Mersenne sayılarıysa (n doğal sayı olmak üzere) $2^n - 1$ şeklinde yazılabilen sayılar.

Tüm bu tanımları yaptıktan sonra matematikçiler ilk gözağrıları olan asal sayıları asla unutmuyorlar ve tanımları içiçe geçirmeye başlıyorlar: 'Mersenne Asalı', 'Kaprekar Asalı', Palindromik Asal' ve tabii onların sonsuz tane olup olmadığı soruları izliyor. *İlginç* değil mi?

Peki İlginç Ne?

İlginç derken ne kastedildiğine ilişkin kafanızda biraz ışık yakabildiysek bu kavramın tanımını yapmayı deneyin. Bildiğiniz birşeyi sözcükleredökmenin her zaman çok kolay olmadığına bir kez daha tanık olacaksınız!

Nilüfer Karadağ

Kaynakça: http://www.uweb.ucsb.edu/~cooldw57/math.htm

Bir Buluşum Var

Aşağıdaki özellikleri ÖSS'ye çalışan arkadaşlarım bulmuştur.

1. İki sayı olsun, birinci sayının x sayısına bölümünden kalan a; ikinci sayının x sayısına bölümünden kalan b olsun; iki sayının arasındaki farkın x sayısına bölümünden kalan c olsun:
Ia-bI = c dir.
örnek:
125/8 → bölüm15 kalan5 (1. kalan a)
238/8 → bölüm29 kalan6 (2. kalan b)
238 - 125 = 113
113/8 → bölüm14 kalan1 (3. kaln c)
Ia-cI = c , I5-6I = 1

2. Sonu 5 ile biten bir sayının karesini kısa yoldan hesaplamak için:
abc....5 × abc....5 = [abc...×(a+1)bc....]....25
örnek:
35×35=1225 yani birinci sayımız 3, üçün bir fazlası 4. Bu iki sayıyı çarpıp son iki basamağa 25 yazıyoruz.
3×4....25 = 1225
örnek:
155×155 = 24025 yani 15×16....25 yani 240 ve 25 yanyana, yani 24025
örnek: 31285×31285=3128×3129....25, yani 978751225. Umarım yeterince izah edebilmişimdir.

Saygılarımla,

Bu ayki yazımızın konusuyla paralellik gösteren bu çalışmayı bize ulaştırdığı için Burak arkadaşımıza teşekkür ederiz. Gönderdiğiniz mektuplarda "ÖSS için çalışırken şöyle bir buluş yaptım" şeklinde başlayanlar oldukça fazla. Üniversite giriş sınavı hazırlığı oldukça yoğun ve uzun bir süreç olduğundan arkadaşlarımız ister istemez pratik yöntemler üretip ufak buluşlar yapıyor. Bu yolda çalışmaya başlayan herkese başarılar diliyoruz.

Birinci buluşumuz, kalan algoritmasıyla ilgili. Aslında bu algoritma oldukça eski. Üstelik sadece çıkarmada değil, toplama ve çarpmada da geçerli. Arkadaşımızın önerdiği gibi iki sayı olsun ve birinci sayının x sayısına bölümünden kalan a, ikinci sayının x sayısına bölümünden kalan b olsun (doğal sayılarla çalıştığımızı ve bölen x sayısının 0'dan farklı olduğunu söylemekte de fayda var). Bu iki sayının toplamı, çarpımı ya da farkı (mutlak değeri) sayıların ayrı ayrı bölünmesi ile kalan sayıların, sırasıyla, toplamı, çarpımı ya da farkı olacaktır. Şayet bu sayılar x'den büyükse sayı tekrar bölünür. Arkadaşımızın örneği üzerinde çalışalım:
125/8 →bölüm 15 kalan5 (1. kalan a)
238/8 → bölüm29 kalan6 (2. kalan b)
➢ 238 + 125 = 363
363/8 → **kalan3**
5+6=11; 8'den büyük olduğu için bu sayının da 8'e bölümünden kalana bakarız.
11/8 → **kalan 3**
➢ 238 × 125 = 29750
29744/8 → **kalan 6**
5 × 6 =30;
30/8 → **kalan 6**

Burak arkadaşımızın gönderdiği ikinci kısayol da bilinen bir yol. Önerilen yol özellikle 2 basamaklı ve sonu 5 ile biten sayılar için verimli. Daha yüksek basamaklı sayılar için kullanırsak, yine kalabalalık sayıları çarpmakla uğraşıyorz. Kare alma ve çarpma işlemleri için üretilmiş pek çok kısa yol mevcut. Bir kaçını http://andyllama.com/mike/math_shortcuts.htm sayfasında bulabilirsiniz.

Nilüfer Karadağ
karadagnilufer@yahoo.com

Eğer siz de kaydettiğiniz önemli bir bulgu olduğunu düşünüyorsanız dergimize gönderin ve onu sizin için değerlendirelim. Adresimiz:

TÜBİTAK Bilim ve Teknik Dergisi,
Buluşumu Değerlendirin Köşesi,
Atatürk Bulvarı No:221
Kavaklıdere-ANKARA