Muammer Abalı

Gel de Sevme

Geçen sayıdaki Matemanya köşemizi okuyanlar hatırlayacaklar; sonsuzla biraz oynadık. Ne kadar eğlenceli olduğunu gördük. Aslında, içine girdiğimizde, matematiğin ne kadar büyülü oyunları olduğunu görürüz. Ama sonsuzun büyüsü gibisi yoktur. Sonsuzun büyüsünü ise George Cantor kadar önümüze seren yoktur. 1845 yılında Rusya'da doğmuş bir Alman olan Cantor, 1918'de, ne yazık ki bir akıl hastanesinde bu dünyadan geçti gitti. Matematik dünyasına kattıklarını, başka bir matematik dehası David Hilbert şu cümle ile ifade etmiş:

"Hiç kimse bizi, Cantor'un bizim için yarattığı cennetten çıkaramaz."

Bu sayımızda, işte bu cennetteki oyuncakların bir kaçına şöyle bir bakalım. Unutmayın, sonsuzla oynayacağız. Aklınıza sahip olmaya özen gösterin!

Gerçel (ya da gerçek) sayılar doğrusunun sıfır, bir aralığını düşünelim. Hem 0 hem de 1 aralığın içinde olsun. Bilmeyen ya da hatırlamayanlar için söyleyeyim, eğer bir sayı aralığının en küçük ve en büyük sayıları aralığın içinde ise bunlara kapalı aralık diyoruz ve [0,1] şeklinde gösteriyoruz. Evet, şimdi [0,1] aralığından (1/3,2/3) açık aralığını (eğer son noktalar aralığa dahil değilse, buna da açık aralık dediğimizi hatırlatmış olayım) kesip atalım:

0______________________________1

ile başlayıp,

0__________1/3 2/3_________1

elde ettik.

Dikkat ederseniz, (1/3,2/3) açık aralık olduğundan, hem 1/3 hem de 2/3 noktaları geride kaldı; atılmadı.

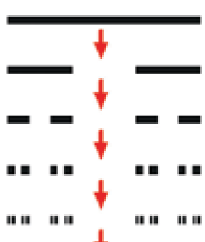
İkinci adımda, hem [0,1/3] aralığının hem de [2/3,1] aralığının orta üçte birlerini kesip atalım: Yani (1/9,2/9) açık aralığını ve (7/9,8/9) açık aralığını kesip atalım. Elimizde [1,1/9], [2/9,1/3], [2/3,7/9], [8/9,1] aralıkları kalsın. Kolaylık olması için aşağıdaki şekilde ifade edersek,

0___ ___1/3 2/3___ ___1

durumu çıktı ortaya.

Bu orta üçte birleri kesip atma işine devam edeceğiz ama önce bir noktaya dikkatinizi çekmek istiyorum: Şekilden de göreceğiniz gibi, kesip atılan parçalar açık aralıklar olduğundan, bazı noktalar hiçbir zaman kesilip atılan kısımlarda kalmayacaktır: 0, 1/9, 2/9, 1/3, 2/3, 7/9, 8/9, 1 sayıları örneğin, şimdiden kaç adım gidersek gidelim, daima geride kalacakları görünüyor.

Birkaç adım daha gittiğimizde şu şekle benzer bir şey elde edeceğimizi hemen göreceksiniz:



Köşelere sayıları yazmadığıma bakmayın. Hayal gücünüzü kullanırsınız nasıl olsa. Oralarda kapalı aralıkların alt ve üst noktalarını gösterir sayılar var. Grafiğe sayıları sığdırmak zor diye yazmadım.

Bu gördüğünüz, Cantor'un bir kurgusu.

Orta üçte birleri kesip atma işine sonsuza kadar devam etsek ne olur? Acaba kesilip atılmış olan parçaların uzunluğu ne kadardır dersiniz?

İlk adımda 1/3 uzunluğu kesip atmıştık hatırlarsanız. İkinci adımda 2 tane 1/9, üçüncü adımda 4 tane 1/27 uzunluğu, dördüncü adımda 8 tane 1/81 uzunluğu atılıyor ve böylece devam ediyor.

Gördüğümüzü yazıyorum şimdi:

1. adım $2^{1-1}=2^0$ tane $(1/3)^1$
2. adım $2^{2-1}=2^1$tane $(1/3)^2$
3. adım $2^{3-1}=2^2$tane $(1/3)^3$

....

n. adım 2^{n-1} tane $(1/3)^n$

bu açık aralıkların uzunluklarını n sonsuza giderken toplayacağız:

$$\frac{1}{2}+\frac{2}{9}+\frac{4}{27}+\frac{8}{81}+\dots=\frac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^n}{3^n}$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{1-\frac{2}{3}}\right)$$

$$=\frac{1}{3}\times 3=1$$

Bu toplama işleminin sonucu hakkında şüpheye kapılmayın. Konumuzun dışında olduğu için üzerinde durmayacağım. Bana güvenin, sonuç doğru.

Gördüğünüz doğru. Kesip atılmış uzunlukların toplamı, başlangıçtaki uzunluğun aynısı, yani 1.

Peki, acaba geriye ne kaldı sizce?

Tuhaf ama gerçek: Geriye kalan sayıların sayısı, işe başladığımızdakilerle aynı. Sayılamaz sonsuz sayıda sayı vardı; gene o kadar sayı var.

Bakınca gördüğümüz köşelerde kalan sayılar var öncelikle: 0, 1, 1/9, 2/9, 1/3, 2/3, 7/9, 8/9, 1/27...

Ama bunun dışında sayılar da kalıyor; hiçbir zaman köşeye gelmeyecek sayılar da var. Örneğin ¼ bunlardan birisi.

Geriye kalan kümenin adı Cantor kümesi. Bu kümenin, işe başlarken kullandığımız [0,1] aralığı kadar "kalabalık" bir küme olduğunu söylemekle yetineyim burada. Bunun çok şık bir ispatı var. Kesirli sayıların 2 tabanına göre yazılmasından yararlanılıyor. Ayrıntısıyla sizi üzmeyeyim! Cantorun dehası.

Size başka bir Cantor güzelliği:
Gerçel sayıların sayılamazlığını nasıl
gösterebiliriz acaba?

Sayılabilir olsalardı, onları alt alta yazabilirdik.

Örnek olarak 0 ile 1 aralığındaki sayıları düşünelim gene; sayılabilir oldukları için doğal sayılarla bire bir eşleyebilirdik. Sıralı olmalarına aldırmayalım. Rastgele listeleyelim; yeter ki hepsi listede olsun.

1-0,764598
2-0,200000
3-0,0136789
4-0,29311448
...

Listemiz bu şekilde sonsuza kadar devam etsin ve gerçel sayıları eksiksiz olarak bu listede toplamış olalım. Yani bu listede olmayan herhangi bir gerçel sayı kalmamış olsun. Sayılabilir olmaları bunu gerektirir. Doğal sayılarla da bire bir eşledik gerçel sayıları; yinelemiş olayım.

Ama şimdi şöyle bir sayı düşünelim:

Virgülden sonraki soldan ilk basamakta, ilk sayının soldan ilk basamağının 1 fazlası olsun; yani 7+1=8. Soldan ikinci basamakta, listedeki ikinci sayının soldan ikinci basamağının 1 fazlası olsun; yani 0+1=1. Soldan üçüncü basamakta, listedeki üçüncü sayının soldan üçüncü basamağındaki sayının 1 fazlası olsun; yani 4. Ve böyle devam etsin. Kurguladığımız sayının soldan n. basamağında, listemizdeki n. sayının soldan n. basamağındaki sayının 1 fazlası olsun.

Yukarıdaki küçük listemizi sonsuz bir liste gibi genişletmiş olarak hayal edin ve Y ile göstereceğim yeni sayımızı yazalım:

Y=0,8142... şeklinde olacaktır.

Bu sayının ilk hazırladığımız listede olması mümkün değil.

1 ile eşlediğimiz ilk sayımızdan farklı çünkü ilk basamakları farklı. 2 ile eşlediğimiz ikinci sayıdan farklı çünkü 2. basamakları farklı; üçüncü sayıdan farklı çünkü 3. basamakları farklı. Hayal edin, listemizde doğal sayılarla eşleyerek sıraladığımız rastgele n. sayı Y'den farklı olmak zorundadır, çünkü n. basamakları farklı olacaktır. Öyleyse, Y sayısının listede olması mümkün değil. Alın size bir çelişki.

O halde başlangıçta yazdığımız liste bütün gerçel sayıları içine almış olamaz.

Cantor'un diagonal ispatı adı verilen bu ispat, gerçel sayıların **sayılamaz sonsuz** bir küme olduğunun kanıtıdır.

İşte bu sayılamaz sonsuz olan kümenin eleman sayısı, sayılabilir sonsuz dediğimiz kümenin (doğal sayılar örneğin) elemen sayısından daha büyüktür ve bu kümenin eleman sayısına Aleph 1 deniyor ve

$$\aleph_1$$

işaretiyle gösteriliyor. Akla dikkat:
Sonsuzdun daha büyük bir sonsuz:
Aleph 0'dan büyük aleph 1!

Başka bir güzellik:

Gene sıfır, bir kapalı aralığını düşünün. Hatırlanacağı üzere [0,1] olarak yazıyorduk. Buna birim aralık da denir. Şimdi bu aralığı kendi kendisiyle çarpalım. Elimizde bir birim kare var: [0,1]x[0,1]. Yani gerçel düzlemde eni, boyu 1 olan bir kare. Hatırlarsınız, bu karenin elemanı olan bir nokta (p noktası olsun) p=(x,y) şeklinde gösterilir. Burada x ve y gerçel sayılar.

Sorumuz şu:

Acaba [0,1] aralığının eleman sayısı mı büyüktür yoksa birim karenin eleman sayısı mı?

Cantor, uzun yıllarını verdiği bu probleme şöyle bir yanıt bulmuş:

Birim kareden herhangi bir sayı alalım. Örnek olsun diye p=(0,7324571, 0,6433210) olsun. Cantor bu sayıyı x=0,76342343527110 sayısıyla eşliyor. Dikkat ederseniz bu son sayı p'nin koordinatlarının örülmüş şekli. İlk koordnattan ilk basamak, sonra ikinci koordinatın ilk basamağı, sonra ilk koordinatın ikinci basamağı, sonra ikinci koordinatın ikinci basamağı ve böylece devam ediyor. Yani, birim karedeki her sayı, gerçel eksendeki bir sayıyla bire bir eşlenmiş oluyor.

İlginç değil mi?

Bu sistemle düzlemden 3 boyutlu uzaya, oradan 4 boyutlu uzaya vb. benzer eşleme yapılabilir. Ve buradan anlayabiliriz ki aslında bütün bu kümeler, gerçel sayılarla aynı sonsuz seviyesindedir ve eleman sayıları aleph 1'dir.

Sayılabilir sonsuz aleph 0; sayılamaz sonsuz aleph 1.

Şöyle bir ilişki bile var:
$2^{\aleph_0} = \aleph_1$

Bunun ayrıntısına da girmeyelim izninizle.
Zaten yeterince kafa karıştırdı değil mi!
Yani işte böyle akıl oyunları da var
matematiğin içinde.

Sizce de şiirsel değil mi!
Gel de sevme!

Yeni ders döneminde başarılar dilerim.