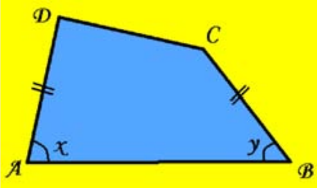
E n g i n   T o k t a ş
matematik_kulesi@yahoo.com



Eşit Kenarlı Dörtgen

Öncelikle bir tanımlama yapacağız: Karşılıklı iki kenarı eşit ve eşit kenarların doğrultularının kesişimi 60 derece olan dörtgene eşit kenarlı (eşkenar değil!) dörtgen diyelim. Şekildeki ABCD eşit kenarlı dörtgende x+y=120°'dir. Şimdi dörtgenin dışında öyle bir P noktası alalım ki PDC üçgeni eşkenar üçgen olsun. Bu durumda kanıtlayınız ki PAB üçgeni de eşkenar üçgen olur.

Altküme Toplamları

(1,2,3) kümesinin boş küme hariç tüm alt kümelerini çarpım olarak payı 1 olan bir kesrin paydasına yazıp toplayalım. 1/1 + 1/2 + 1/3 + 1/1.2 + 1/2.3 + 1/1.3 + 1/1.2.3 = 3. Durumu daha da genelleştirdiğimizde sürpriz bir sonuçla karşılaşıyoruz. (1,2,...n) şeklinde ardışık tamsayılardan oluşturduğumuz kümenin tüm altkümelerini örnekteki gibi topladığımızda n sonucuna ulaşıyoruz.

$$\sum \frac{1}{a.b....k} = n$$

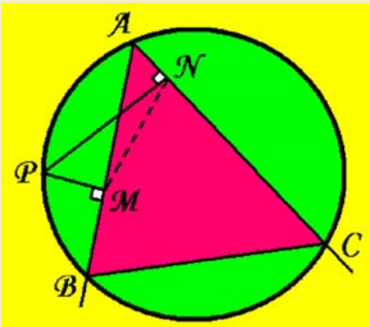
Acaba bu nasıl mümkün olabiliyor?

Garantili Bölme

Sorumuz, 1979-80 Moskova matematik yarışmalarında sorulmuş gerçekten güzel bir soru. Tüm k pozitif tamsayılar için kanıtlayınız ki S=(2^1-1, 2^2-1, 2^3-1, ..., 2^{2k}-1) setinin en az bir elemanı 2k+1 ile tam bölünür.

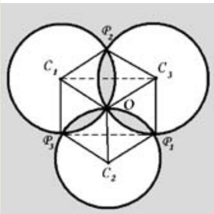
Doğru Konum

Şekildeki ABC üçgeni, köşeleri çember üzerinde tanımlı bir üçgen. Bu çember üzerinde bir P noktası alıyoruz ve bu noktadan AB ile AC kenarlarına M ve N noktalarında kesen dikmeler indiriyoruz. P noktasının pozisyonuna göre M ve N noktası çemberin dışında da olabilir. P noktasını öyle bir yerden alınız ki MN kenarı maksimum uzunlukta olsun. Peki böyle bir durumda MN kenarının uzunluğu ne olur?



Geçen Ayın Çözümleri

Dördüz Çemberler



Öncelikle $C_1P_3C_2O$ ve $OC_2P_1C_3$ eşkenar dörtgenlerini inceleyelim. Şekilde görüldüğü gibi iki eşkenar dörtgenin kenar uzunlukları eşit ve r'dir. O halde C_1P_3 ile OC_2 ve C_3P_1 birbirlerine paralel ve eşit olurlar. Bu durumda $C_1P_3P_1C_3$ dörtgeninin bir paralelkenar olduğunu söyleyebiliriz. Bu paralelkenarın bizi ilgilendiren kısmı $C_1C_3 = P_1P_3$ eşitliğinin olması. Şu ana kadar yaptığımız işlemleri $C_1C_2C_3$ üçgeninin C_2C_3 ve C_1C_2 kenarları için de yaparsak $C_1C_2C_3$ üçgeni ile $P_1P_2P_3$ üçgeninin eş üçgenler olduğunu görürüz. $C_1C_2C_3$ üçgeninin O merkezli çevrel çemberinin yarıçapının r olduğunu biliyoruz.O halde $P_1P_2P_3$ üçgeninin çevrel çemberinin yarıçapı da r olur.

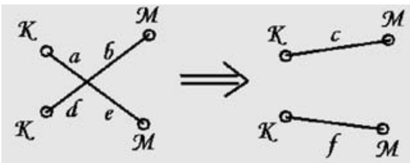
Ünlü Euler Fonksiyonu

Öncelikle yanlış anlaşılmayı engellemek için okuyucumuz Bilal Demir'in uyarısını göz önüne alarak fonksiyonun tanım kümesinin tamsayılar olduğunu söyleyelim. Euler'in dikkat çektiği bu fonksiyonun özelliği x=-40, -39, ..., 39 sayıları için fonksiyonun hep asal sayı vermesidir. O halde bu aralıkta sonucun bir kare olması imkansız. Peki ya x>40 ise? x=41 için f(x)=41.43 olur ve sonuç tam kare değildir. x=42,43,... değerleri için şu eşitsizlikleri yazabiliriz: f(x)=x^2+x+41 > x^2 ve f(x-1)=x^2-x+41 < x^2. Yani f(x-1) < x2 < f(x) 'dir. Her zaman tam kare iki ardışık fonksiyon değeri arasında kalır. Aynı yöntemi x<-41 için de yapabiliriz. Bu şeklide ispatımızı da tamamlamış oluruz.

Domino Tahtası

nx2'lik tahtada yapılabilecek tüm farklı dizilimlerin sayısını veren fonksiyon f(n) olsun. Bu nx2'lik domino tahtasındaki tüm dizilimleri iki gruba ayırabiliriz. Birinci gruptaki tüm dizilimlerde, tahtanın en sol ucunda dikey durumunda 2 kareyi dolduran bir domino taşı bulunur. Bu durumda geriye (n-1)x2'lik tahta kalır ve bu tahtadaki tüm dizilimlerin sayısı f(n-1) olur. İkinci grupta ise tahtanın en solunda yatay durumda üst üste iki domino taşının 4 kareyi doldurduğu dizilimler vardır. Bu grup da (n-2)x2'lik tahtaya karşılık f(n-2) tane eleman içerir. O halde f(n) = f(n-1) + f(n-2) olur. Karşınızda duran bu eşitlik Fibonacci dizisinden başka bir şey değildir!

Nokta Eşleştirme

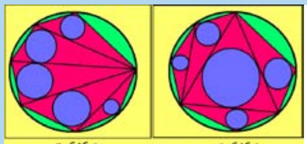


Soruda verilen n sayısı sonlu olduğu için olası tüm eşleştirmelerin sayısı da sonlu olacaktır. Her farklı eşleştirmede oluşan doğru parçalarının uzunluklarını toplarsak büyük olasılıkla hep farklı bir değer elde ederiz. Ancak eğer eşleştirmede bir kesişme oluşuyorsa üçgen eşitsizliğini göz önüne alarak doğru parçaları toplamı daha az olan bir eşleştirmenin mutlaka var olduğunu söyleyebiliriz. Şekilde görüldüğü gibi a+b>c, d+e>f 'dir. Böyle bir durumda diğer n-2 eşleştirmeye dokunmadan şekildeki gibi eşleştirme düzeltilir.

Matematiğin Şaşırtan Yüzü

Antik Japon Teoremi

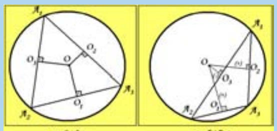
Bu ay bölümümüzde şaşırtıcılığını biraz da yaşına borçlu olan bir teoremi konuk edeceğiz. Bahsedeceğimiz teorem, çok eski zamanlarda ismi saptanamayan Japon bir matematikçi tarafından bulundu. O zamanların Japon inançları, halka mal olmuş en değer verilen şeylerin (bazı sanat çalışmaları, çeşitli icatlar, matematiksel buluşlar...) tapınakta korunmasını gerektiriyordu. Bu hem Tanrıya verilen güzel bir hediyeydi hem de sahibi için çok önemli bir onur demekti. Teoremimiz, bir tablet görünümünde 1800 yılına kadar insanoğlu ile oynadığı saklambacı başarıyla sürdürdü. Ne var ki 1800 yılında Japonya'da yapılan arkeolojik kazılar bu dünya mirasını gün ışığına çıkardı. İşte asaletini sadeliğinden alan eski Japon teoremimiz:



Şekil 1   Şekil 2

Tüm köşeleri çember üzerinde olan bir konveks çokgen olsun. Şimdi bu çokgen bir köşeden diğer köşeye çizilen doğru parçaları ile Şekil-1'deki gibi üçgenlere ayrılsın ve her üçgenin iç teğet çemberleri çizilsin. Şu ana kadar anlatılanlara uyan iki farklı çizim Şekil-1 ve Şekil-2'de gösteriliyor. Teorem diyor ki, çokgeni nasıl üçgenlere ayırdığınızdan bağımsız olarak çizilen iç teğet çemberlerin yarıçapları toplamı her zaman sabittir.

Teoremimizin ispatında son derece meşhur bir başka teoremi kullanacağız. L.M. Carnot(1753-1823) tarafından bulunan ve "Carnot Teoremi" olarak adlandırılan teorem şunu söyler:



Şekil 3   Şekil 4

Herhangi bir $A_1A_2A_3$ üçgeninde çevrel çemberin merkezinin kenarlara uzaklığı toplamı (uygun işaretlendirme şartıyla) çevrel çemberin yarıçapı(R) ile içteğet çemberin yarıçapının(r) toplamına eşittir. $OO_1+OO_2+OO_3$ = R+r.

Teoremde bahsedilen uygun işaretlendirme şartına göre eğer OO_i doğru parçası tamamen üçgenin dışında ise işareti (-) olarak seçilir. Yerimizin yeterli olmaması nedeniyle Carnot Teoremi'nin ispatını bu ayki yazımızda yer veremeyeceğiz. Meraklı okuyucularimiz özellikle internet yardımıyla bu ispata kolayca ulaşabilirler.

Carnot teoremi, Japon teoremini ispatlamakta öyle yerine oturuyor ki! Dikkat ederseniz çokgeni nasıl bölersek bölelim her üçgenin çevrel çemberi ortak oluyor. Eğer Japon teoremi doğruysa oluşan n-2 üçgen için Carnot'a göre $\sum r_i = \sum\left(OO_1^{(i)} + OO_2^{(i)} + OO_3^{(i)}\right) - \sum R$ olmalı. Yapmamız gereken tek şey her çokgen için $\sum\left(OO_1^{(i)} + OO_2^{(i)} + OO_3^{(i)}\right)$ teriminin aynı olduğunu göstermek.

Çizdiğimiz her doğru parçası aslında komşu iki üçgenin ortak kenarıdır. Bu kenarın çemberin merkezine uzaklığını veren OO' dikmesi bir üçgenin tamamen dışında iken diğer üçgenin içinden geçer. O halde bu uzaklık, bir üçgende (-) diğerinde (+) işareti alacağı için toplamda etkisiz olur. Toplamda sadeleşmeden kalan kenarlar sadece çokgenin kenarlarıdır, bu da çokgeni nasıl üçgenlere böldüğümüzden bağımsızdır. Artık sonuca ulaşabiliriz. Çokgeni nasıl bölersek bölelim oluşan üçgenlerin içteğet çemberlerinin yarıçapı toplamı hep aynı değeri alır.