n'inci dereceden bir bilinmeyenli bir denklemin öyküsü

CEBİRİN TARİHSEL GELİŞİMİ

Büyük bir buluş yapmak öyle herkese nasip olmayan zor bir işti ama kimi zaman o buluşun nerelerde kullanılacağını ya da ne boyutlara geleceğini kestirmek daha da zor bir iştir. İçinde bulunduğumuz çağın değişim hızına bakacak olursak, şimdilik 10 yıl sonrası hakkında az çok tahminler yapılsa bile 30-40 yıl sonrasının neler getireceğinden bahsetmek ütopyalardan bahsetmekle eşdeğer sayılıyor. Teknolojinin geldiği noktalardan hayranlıkla bahsedenlerin sıklıkla kullandığı "insanoğlu artık aya çıkıyor" cümlesi artık eskidi. Teknolojinin katettiği yolu farketmek için şöyle bir geriye dönüp bakmak şart! Radyo çıktığında "radyonun resimlisi" ni hayal edenler olmuştur elbette; ama gerçekleşeceğine ihtimal verene o dönemde pek rastlanmaz. Telefon çıktıktan sonraysa onları kablosundan sıyırıp her gittiğimiz yere taşıyabileceğimiz fikri de en fazla güzel bir hayal olabilirdi. Bugünse kimse cep telefonu icat edilmeden önce işlerini, randevularını nasıl organize ettiğini hatırlamıyor bile.

Dev Bilgisayarlardan Dizüstülere

Kendisine ilk sayısal bilgisayar ünvanı verilmiş olmasa da, *genel amaçlı programlama* için üretilen ilk elektronik bilgisayar 1942'de Pennsylvania Üniversitesi'nden J. Presper Eckert, John W. Mauchly ve meslektaşları tarafından geliştirilen ENIAC (Electronic Numerical Integrator and Calculator; Elektronik Numerik Birleştirici ve Hesap Makinesi) isimli alettir. 487.000 dolara mal olan ve 167 metre kareyi kaplayan ve 18.000 Watt elektrik tüketen ENIAC'ın ağırlığı 30 tonu geçiyordu. O zamanlarda bu aletin ne kadar küçüleceği konusunda düşünülen fikir neydi bilinmez; ama şu sıralar oldukça revaçta olan, taşınabilir teknolojiyi bizlere tanıştıran dizüstü bilgisayarların beraberinde getirdiği kablosuz internet teknolojisi yakında her yerde internete bağlanabileceğimiz konusunda bizi tahminler yapmaya itiyor.

Gelişen ve Değişen Matematik

Matematik tarihinin MÖ 3. milenyumda başladığı fikri genel kabul görüyor. Başlangıçta zamanın gereksinimlerine cevap veren matematiğin kısa bir süre içinde insanlarca çalışılan, gereksinim dışında üzerinde düşünülen bir bilim olduğunu kanıtlayan belgeler de var. Ortaya çıktığı zamanlarda kimselerin matematiksel teorilerin ne boyutlara taşınabileceğini tahmin edebilmesi beklenemez tabii. Şanslı olan bizler 21.yüzyılda şöyle bir durup geride kalan binlerce yıllık tarihi inceleme fırsatına sahibiz. Burada, pek çok kola ayrılmış olan matematiğin ancak bir ana kolunun alt dalını seçip onu mercek altında inceleyeceğiz.

Herkes Cebir Öğrenmeli!

Her ne kadar ülkemizde ilköğretim zorunlu hale getirilmiş olsa da, ne yazık ki henüz her çocuk bu haktan yararlanamıyor. Bu eğitime tabi olanlarsa, eğitim sistemimizin hedefleri doğrultusunda çeşitli dersler alıyor. Toplam saati baskın olan matematik dersinin herkese öğrettiği dallarından birisi de cebirdir. Genel olarak cebir, matematiğin denklem tiplerini sınıflandırıp onların çözüm tekniklerini analiz eden ve bunları yaparken 4 işlem, üst ve kök alma gibi cebirsel işlemleri kullanan bir ana daldır. Her matematik eğitimi cebiri zorunlu kılar çünkü cebir problem çözme, sorgulama, karar verme, matık ve ilişki kurma yeteneğini, öğrendiklerini analiz edip gerekli yerlerde kullanabilme kabiliyetini geliştirir. Yani eğitim, hakkı ile verildiğinde bireyin bu özelliklerinin gelişmesi beklenir.

Modern Cebirin Başlangıcı

Cebirin isim babası olan Harizmi, Hisabül-Cebr ve'l-Mukabele (Cebr kelimesi Türkçeye Cebir, batı dillerine algebra olarak geçmiştir) adlı kitabında cebirsel işlemleri denklemin iki tarafına uygulayarak denklem çözme tekniklerinden söz etmiştir. Tabii burada adı geçen denklemler günümüzde kullandığımız harfler ve sembollerle yazılmış denklemlerden çok onların günlük dilde çevirisi olan sözlü ifadeleridir. Bu ifadelerle günümüzünkiler arasında kurabileceğimiz en belirgin ortak noktaysa Harizmi'nin sözlü denklemlerinde kullandığı bilinmeyenleri "şey" şeklinde ifade etmesidir. Arapça kökenli olan şey sözcüğü sonraları İspanyol yapıtlarında Xay şeklinde yazıldığından, "x" bilinmeyeni ifade etmek için kullanılan global bir harf olmak üzere yola koyulmuştur. Latin çevirileri Avrupaya ulaşan ve bir bilinmeyenli ikinci derece denklemler için bir sınıflandırma veren Hisabül-Cebr ve'l-Mukabele 16. yüzyılda Avrupa üniversitelerinde matematik ders kitabı olarak okutulmaktaydı.

"Şey"i Bulma Teknikleri

Kimi toplumların bir süre "şey sanatı" diye isimlendirdiği cebirin asıl amacı bilinmeyenin temsil ettiği sayıyı bulmaktır. Cebir, sayının içinde geçtiği denklemin bilinmeyen miktarına, bilinmeyenin en yüksek derecesine, denklem miktarına göre çeşitli metodlar geliştirmektedir. Bu çözüm metodlarına genel olarak modern cebirin babası Harizmi'ye ithafen algoritma ismi verilmiştir. (Yine Batı dillerinde al-Kharizmi olarak geçen el Harizmi kelimesi okunuşu itibariyle algoritma kelimesine dönüştürülmüştür)

n'inci Dereceden Bir Bilinmeyenli Bir Denklem ($n \in N^+$)

Birinci dereceden bir bilinmeyenli bir denklem 3x+5=0 ifadesi ile örneklendirilebilir ve çözümü cebirin bize öğrettiği tekniklerle kolayca x=-5/3 olarak bulunur. $ax^2 + bx + c = 0$ şeklindeki 2inci dereceye geçtiğimizdeyse lise yıllarımızda ezberlediğimiz ikinci derece denklem formülü devreye girer:

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

bu formülü bildiği gibi çözümün olması için kök içindeki ifadenin pozitif olması gerektiğinin de farkında olan Harizmi'nin 3. derece denklemlerle uğraştığını gösteren bir bilgi yok. Ondan 250 yıl sonra ortaya çıkan meslektaşı Ömer Hayyam 3. derece denklemlerin sembolik ifadelerinden çok geometrik yapılarıyla uğraştı. Cebirin 3 bilinmeyenli denklemlerdeki gelişimi, Arapça eserlerin Avrupa'ya taşınmasıyla devam etti. Harizmi ve Hayyam'ın eserlerinden etkilenen İtalyan matematikçi Leonardo Fibonacci(1170-1230) $x^3 + 2x^2 + cx - d = 0$ tipindeki denklemlerin yaklaşık çözümleri üzerinde çalıştı.

3. Derece Denklemler

Ortaçağ matematikçilerinin kafasını uzun süre kurcalayan bu problemin çözülmesi zaman aldı. 15. yüzyılın sonlarında 3. derece denklemlerin bazı özel hallerinin kesin çözümleri biliniyordu. Daha sonra bu denklemlerin şu 3 hale indirgenebileceğinin farkına varıldı:

$$x^3 + px = q$$
$$x^3 = px + q$$
$$x^3 + p = qx \qquad (p, q \succ 0)$$

Bologna Üniversitesi profesörlerinden Scipione del Ferro isimli İtalyan matematikçi, bu denklemlerin çözümünü buldu ama çalışmasını yayımlamadı. 1535'de öğrencisi Niccolo Tartaglia çözümü yeniden buldu ve bunu Geronimo Cardano'ya söyledi ve bunu bir sır olarak saklamasını istedi. Nedendir bilinmez, o günlerde matematikçiler çalışmalarını gizli tutmayı tercih ediyorlardı. Cardano bu sırrı saklamayarak izinsizce 1545'de 3. derece denklemin çözümünü yayımladı. Bu formül, Cardano formülü olarak bilinir. İnsanları bu kadar zorlayan bu denklemin çözüm yolunu cebir genel kültürünüze bir katkıda bulunması açısından vermeyi uygun görüyoruz.

Denklemin Çözümü

$x^3 + ax^2 + bx + c = 0$ 3. derece bir denklemin genel halidir. Önce bunu az önce belirttiğimiz hallerden birine dönüştürelim. Bunun için

$$x = \lambda - \frac{1}{3}a$$

dönüşümü yapalım.

$$(\lambda - \frac{1}{3}a)^3 + p(\lambda - \frac{1}{3}a)^2 + b(\lambda - \frac{1}{3}a) + c = 0$$

Gerekli sadeleştirmeleri yapınca x^2'li terim istendiği gibi kayboluyor ve denklem genel olarak $\lambda^3 + p\lambda + q = 0$ konumuna geliyor. (işlemlerin uzun halini denemenizi tavsiye ederiz. p ve q a,b,c cinsinden değerler) Şimdi mesele bu denklemin çözümünü bulmaya kalıyor. Çözüm

$$\lambda = z - \frac{p^3}{27z^3}$$

dönüşümü yapmaktan geçiyor. Denklemin son hali

$$z^6 + qz^3 - \frac{p^3}{27} = 0 .$$

2. derece denkleme dönüşebilen bu ifadenin çözümünü bildiğimiz formülle rahatlıkla bulabiliriz:

$$z^3 = \frac{1}{2}\left\{ -q + \sqrt{q^2 + \frac{4p^3}{27}} \right\}$$

Şimdi sırayla z yi λ'ya; λ'yı da x'e dönüştürerek temel formülü çıkarabilirsiniz işin bu kısmı size kalsın ama uyarıyoruz, karşılaşacağınız formül pek de iç açıcı olmayacak.

ax³+bx²+cx+d=0 denkleminin genel çözümü:

$$x = \sqrt[3]{\left(\frac{-b^3}{27a^3} + \frac{bc}{6a^2} - \frac{d}{2a}\right) + \sqrt{\left(\frac{-b^3}{27a^3} + \frac{bc}{6a^2} - \frac{d}{2a}\right)^2 + \left(\frac{c}{3a} - \frac{b^2}{9a^2}\right)^3}}$$
$$+ \sqrt[3]{\left(\frac{-b^3}{27a^3} + \frac{bc}{6a^2} - \frac{d}{2a}\right) - \sqrt{\left(\frac{-b^3}{27a^3} + \frac{bc}{6a^2} - \frac{d}{2a}\right)^2 + \left(\frac{c}{3a} - \frac{b^2}{9a^2}\right)^3}} - \frac{b}{3a} .$$

Bu denklemin çözümünün bulunması yüzyıllar almış olsa da 4. derece için fazla beklenmedi; hatta bu çözüm de Cardano'nun 3. derece denklemin çözümünü yayımladığı eserde yayımladı. Çözümün sahibi, hizmetinde çalışan Lodovico Ferrari idi...

5 ve sonrası

Bu gelişmeler 16. yüzyılı geride bırakmış, matematikçiler sıradaki denklemlerin formüllerini çıkarmaya koyulmuşlardı. İki koca yüzyıl geçmesine karşın 5. dereceye ilişkin bir formül elde edilememişti. Bu durum matematik çevrelerinde böyle formüllerin olmayacağı şüpheleri uyandırmaya başladı. Formülün bulunamaması onun olmadığını söylemek için yeterli olmuyor bunun ispatlanması gerekiyordu. İşte cebirin bu tip denklemlerdeki rolünün sona ermesi, 19.yüzyılda iki matematikçinin böyle 5 ve daha büyük dereceli bir bilinmeyenli genel denklemlerin çözümünü gösteren cebirsel formüller bulunamayacağını ispatlamasına denk gelir. Dehşet görünüşlü formüller beklerken böyle bir ifade ile karşılaşınca insan şaşkınlığını gizleyemiyor doğrusu. Bu ispata imzalarını atanlarsa (birbirinden bağımsız olarak) sırasıyla 27 ve 21 yaşlarında ölen Norveçli Abel ve Fransız Galois. Birbirinin varlığından habersiz bu iki matematikçiyi ortak noktada buluşturan yalnız teoremleri değil, aynı zamanda erken son bulan hazin sonlarıdır. Biraz daha ömürleri olsa kimbilir daha neler yapacaklardı.

Nereden Nereye

Galois, ölmeden bir gün önce yazdığı makalesinde bu ispatı yapmakla kalmamış sayıları oldukça fazla olan bazı özel denklemlerin cebirsel yöntemlerle köklerinin bulunabilmesi için hangi koşulların gerektiğini anlatan bir kuram da yazmıştır. Bu tür özel denklemleri ve kökleri arasındaki ilişkileri inceleyen kuram, üreticisinin adıyla anılan Galois kuramıdır. Elinize bir pergel ve sadece çizgi çizmeye yarayan (ölçüm yapmayan) bir cetvel alın. Siz bu ikisi ile neler çizebileceğinizi düşünürken, biz ne yapamayacağınızı söyleyelim. Cetvelle çizeceğiniz her hangi bir açıyı 3 eşit parçaya bölemezsiniz. Konumuzla alakasız gibi görünen bu ifadenin ispatı, Galois Kuramı'nın pek çok geometrik uygulamasından sadece biri.

Başından beri cebirin sadık bekçisi olan denklemlerin yolu bu noktadan sonra ikiye ayrılıyor. Kesin çözümü bulunabilenler cebirin içinde kalırken, bulunamayanlar analizin konusuna girerek yaklaşımlar kullanılarak çözülebiliyor.

Matematikçiler bizi şaşırtacak bulgular sunmaya devam ederken bizler de içinizdeki matematikçiyi çıkartmaya karar verdik. Dergimize gelen “bir buluşum var, değerlendirebilir misiniz” içerikli mektuplarınıza bu köşemizde yer vereceğiz. Eğer kaydettiğiniz önemli bir bulgu olduğunu düşünüyorsanız dergimize gönderin ve onu sizin için değerlendirelim.

TÜBİTAK Bilim ve Teknik Dergisi, Buluşumu Değerlendirin Köşesi, Atatürk Bulvarı No:221 Kavaklıdere-ANKARA

Nilüfer Karadağ

Kaynak:
http://www.scit.wlv.ac.uk/university/scit/modules/mm2217/ar.htm

Bir Buluşum Var

Fermat’ın Son Teoreminin İspatı

Sakıp Sabancı Anadolu Lisesi 1. sınıf öğrencisiyim. TÜBİTAK yayınlarından Jerry P. King ‘in Matematik Sanatı adlı eserinde Pierre de Fermat’ın bulmuş olduğu fakat ispatlamadığı

“$n \succ 2, n \in N$ olmak üzere ve $a^n + b^n = c^n$ eşitliğini sağlayan (0’dan ve birbirinden) farklı a,b,c pozitif tamsayıları olamaz”

Şeklindeki son teoreminin henüz ispatlanmadığını okudum.Aşağıda kendi bulmuş olduğum ispatı sunmaktayım.

$a^n + b^n = c^n$ olduğunu varsayalım. Eşitliğin her tarafına da aynı şeyi uygularsak eşitlik bozulmaz.

$$(a^n + b^n)(a^n - b^n) = c^n(a^n - b^n)$$
$$(a^n)^2 - (b^n)^2 = c^n a^n - c^n b^n$$
$$(a^2)^n - (b^2)^n = (ca)^n - (cb)^n$$

terimlerin üstleri eşit olduğundan şu eşitlikleri yazabiliriz.

$a^2 = ca$ $\qquad b^2 = cb$ Bu yüzden
$a = c$ $\qquad b = c$ diyebiliriz.

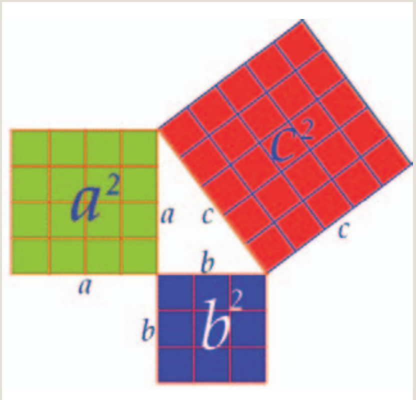
Öyleyse
$a^n + b^n = c^n$ yerine
$c^n + c^n = c^n$ yazılabilir.
$2c^n \neq c^n$ olduğundan
$a^n + b^n \neq c^n$

İspatımı değerlendirmenizi saygılarımla arz ederim.

Ertan Elma

Ertan arkadaşımıza bu çalışmasını bizimle paylaştığı için teşekkür ediyor ve öğrenim hayatında başarılar diliyoruz. İnsanoğlunu 350 yıl boyunca uğraştıran böylesine zorlu bir problem üzerinde çalışma cesaretini gösterdiği için kendisini ayrıca tebrik ediyoruz.

Aslında Fermat’ın son teoremi 1993 yılında Andrew Wiles tarafından ispatlandı. Kitap eski basım olduğu için son teoremin hala ispatının yapılamadığını yazıyor olmalı. Yine de bu teoremin alternatif bir ispatının bulunması önemli olabilir. Çünkü Wiles Son Teoremi ona denk olduğu ispatlanan başka bir varsayımın doğruluğunu göstererek ispatlamıştı. Bu nedenle doğrudan teoremin kendisinin ispatlanması da oldukça ses getirecek bir buluş olacaktır, hatta bunun üzerinde çalışan bilim adamları da mutlaka vardır.



Gelelim arkadaşımızın çalışmasına... Ne yazık ki ispat hatalı. Doğru olsaydı eğer, a,b,c nin pozitif tamsayı olduğunu ispatın hiçbir yerinde kullanmadığı için böyle a,b,c reel sayı üçlüsünün bulunamayacağını da ispatlamış olurdu. Oysaki her n için sonsuz sayıda reel a,b,c üçlüsü bulunabilir. Peki hatayı nerede yaptık. Basamakları tekrar inceleyelim ve ispatı tekrar yazalım:

$a^n + b^n = c^n$ denkleminin $n \succ 2, n \in N$ için çözümlerini arayalım

$(a^n + b^n)(a^n - b^n) = c^n(a^n - b^n)$ her tarafı çarptığımız sayının 0 olmaması için $a \neq b$ önlemini alalım. (İki tarafı 0 ile çarpmamıza izin verilse 1 ile 2005 i bile birbirine eşitleyebiliriz!)

$$(a^n)^2 - (b^n)^2 = c^n a^n - c^n b^n$$
$$(a^2)^n - (b^2)^n = (ca)^n - (cb)^n$$

buraya kadar bir problem yok. Ama sıradaki geçiş $a^2 = ca$ $\qquad b^2 = cb$ yani üstler eşitse, tabanlar da eşittir geçişi ciddi bir adım. Bu adımın $n \succ 2, n \in N$ a,b,c tamsayı olmak üzere doğru olduğunu kabul edelim (!??)

Öyleyse
$a = c$ $\qquad b = c$
$a = 0$ veya $b = 0$

a=b yi başlangıçta yaptığım çarpma nedeniyle kabul etmediğim için çözümler

$a = c$ ve $b = 0$ veya
$b = c$ ve $a = 0$

olmak durumundadır. Ve denklemin tek çözümleridir. İspat tamamlanmıştır.

Arada doğru olduğunu kabul ettiğimiz adımı da ispatlamamız gerekir. Korkarım ki bunu ispatlamak Fermat’ın Son Teoremini ispatlamaya denktir. Yani o geçişi yapmak için teoremin doğru olduğunu kabul etmek gerekir. Özetle ispat doğruluğunu göstermesi gereken ifadeyi doğru kabul ederek kısa bir kısır döngüye girmiştir. Ama ilk bakışta kolaylıkla farkedilemeyen bu hatanın Ertan arkadaşımızı ispatı yaptığına dair aldatması çok doğal.

İspatlarda yapılan hataların farkedilmesi bazen zor olabiliyor. Bu nedenle hata yapmamak için cebir kurallarını hep gözönünde bulundurmak gereklidir. Bu konuda 2=0 ifadesine yazılmış çok tipik bir ispat vardır.

$a = 1$ ve $b = 1$ olsun
$a = b$ her tarafın karesini alırsak
$a^2 = b^2$
$a^2 - b^2 = 0$ ifadeyi çarpanlarına ayıralım
$(a-b)(a+b) = 0$
$(a-b)(a+b)/(a-b) = 0/(a-b)$
$(a+b) = 0$ a ve b nin değerlerini yerleştirirsek
$1 + 1 = 0$
$2=0$

Nerede hata yaptık? İfadenin her tarafını a-b ye bölerken aslında 0’a bölmüş oluyorduk. Oysa ki bu yasak! İşte sayıyı 0’a bölmenin neden izin verilmediğinin nedenini ve nelere yol açabileceğini burada daha net görebiliriz.