YÜZ YILDIR ÇÖZÜLEMEYEN PROBLEM

POINCARÉ SANISI

Turgut Önder*

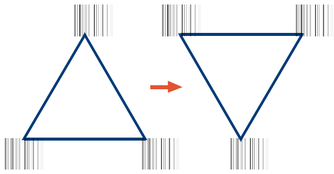
Geçtiğimiz yıl içinde Amerika Birleşik Devletleri'nde Clay Matematik Enstitüsü, yeni bir binyıla girilmesi nedeniyle, uzun yıllar çözülememiş yedi problemi, binyılın problemleri olarak saptadı ve her birinin çözümü için yüklü birer ödül koydu. Bu problemlerden biri de, 1854-1912 yılları arasında yaşamış ünlü Fransız matematikçi Henri Poincaré tarafından ortaya atılan bir iddiaya dayanan ve bugün "Poincaré Sanısı" diye adlandırılan problemdi. Poincaré'nin 1904 yılında ortaya attığı bu iddia, bugüne kadar ne kanıtlanabildi ne de çürütülebildi. Bu sanının bugüne kadar pek çok yanlış kanıtı ileri sürüldü; onunla ilgili olarak pek çok yanlış "karşı örnek" ortaya atıldı.

Matematikçileri bir asırdır uğraştıran Poincaré Sanısı'nın, konunun uzmanı olmayan ama matematiğe biraz ilgi duyanlar tarafından da oldukça kolay anlaşılabileceğini düşündüğümüz, oldukça basit bir ifadesi var. Bu sanının anlaşılabilmesi için gerekli olan anahtar kavram "topolojik eşdeğerlik" olarak adlandırılabilir.

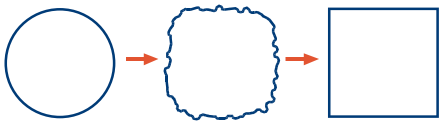
Geometri, katı hareketlerin, yani şekil, açı ve uzunlukları değiştirmeyen dönüşümlerin çalışılması olarak düşünülebilir. Bir kare ve bir çember, geometrik olarak birbirinden farklı nesnelerdir; çünkü birini diğerinden katı bir düzlemsel hareket uygulayarak elde edemeyiz. Diğer bir deyişle, bu iki geometrik nesneden birini düzlemde kaydırıp döndürerek diğeriyle çakıştıramayız. Bu anlamda, kenar uzunlukları farklı iki kare, farklı geometrik nesnelerdir.

Ne var ki, gerçek hayatta kusursuz düzgün şekiller yoktur, şeklin bütünüyle korunduğu hareketlere de ender rastlanır. Genelde her nesne dönüşümler sırasında birtakım deformasyonlara uğrar. Şimdi, deformasyonları göz önüne alarak hareket kavramımızı biraz daha genişletmeye çalışalım.

Elimizde hamur, lastik şerit gibi deformasyona elverişli nesneler olsun. Şöyle bir anlaşma yapalım: Parça eklemeden veya çıkarmadan, ya da nesnenin sürekliliğini bozan kesme, koparma, delik açma gibi işlemleri yapmadan, bir hamur parçası veya bir lastik şeritten, tersine çevrilebilir sürekli bir deformasyonla elde edeceğimiz yeni şekilleri, ilk şekliyle eşdeğer farzedelim. Esnetme, sıkıştırma, hamur açma gibi dönüşümler bu tür deformasyonlarla sonuçlanabilecek işlemlere örnek olarak gösterilebilir. Yukarıda anlattığımız türden bir deformasyonla birbirine dönüştürülebilen iki nesne, birbirine topolojik olarak eşdeğerdir deriz. Örneğin, farklı kenar uzunluklarına sahip iki kare, geometrik olarak farklı nesneler oldukları halde topolojik olarak eşdeğerdirler. Çünkü bir kare, esnetme veya sıkıştırma gibi bir sürekli deformasyon altında, daha büyük veya daha küçük bir kareye dönüştürülebilir. Hatta, topolojik açıdan çember ve kare bile eşdeğer nesnelerdir: Uçları bağlanarak çember haline getirilmiş bir sicim veya lastik şeride, onu kesmeksizin bir kare şekli verebiliriz. Böylece, nesneleri topolojik eşdeğerlik



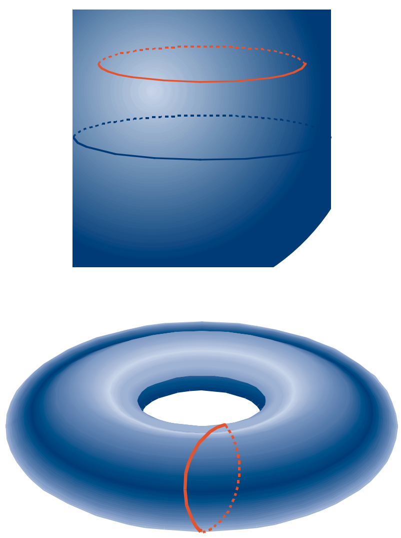
Geometrik dönüşüm



Topolojik dönüşüm

bağlamında incelersek uzunluk, açı gibi geometrik kavramlar önemini kaybeder, nesnelerin sürekli deformasyonlar altında değişmeyen özellikleri (topolojik özellikler) ön plana çıkar.

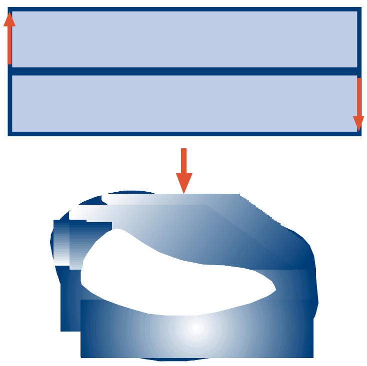
Topolojik eşdeğerlik kavramını çalışmak için gerekli kavram ve tekniklerin yeni bir alan olarak ortaya çıkışı, Henri Poincaré 'nin 1892 yılında topoloji üzerine yazdığı ilk notla başladı denebilir. Daha önceleri Euler, Listing, Möbius, Riemann, Klein ve Betti gibi matematikçilerin zaman içerisine dağılmış bazı çalışmaları var. Hatta, daha 1679 yılında Leibnitz, o zamanlar henüz ismi bile ortalıkta olmayan topolojik eşdeğerlik kavramını inceleyecek yepyeni bir geometri türüne gereksinim olduğunu vurgulamıştır. Topoloji sözcüğü, ilk defa, yukarıda sözü edilen matematikçilerden Listing tarafından kullanılmıştır. Daha önceleri topoloji sözcüğü yerine, belki "durum analizi" olarak çevirebileceğimiz "analysis situs" terimi kullanılmaktaydı.



Küre basit bağlantılı bir yüzeydir,
otomobil lastiği basit bağlantılı değildir.

Şimdi de bir futbol topu ve şişirilmiş otomobil iç lastiği alalım. Futbol topunu saran çember şeklindeki bir lastik şeridi, kesmeden ve topun yüzeyinden ayırmadan sıyırarak büzebilir, bir noktada toplayabiliriz. Ama bir otomobil lastiğini enine olarak saran bir lastik şeridi, otomobil lastiği ya da şeridi kesmeksizin sıyırarak bir noktaya büzemeyiz. Bunu, "topun yüzeyi basit bağlantılıdır", ama otomobil lastiğinin yüzeyi değildir" diye ifade ediyoruz.

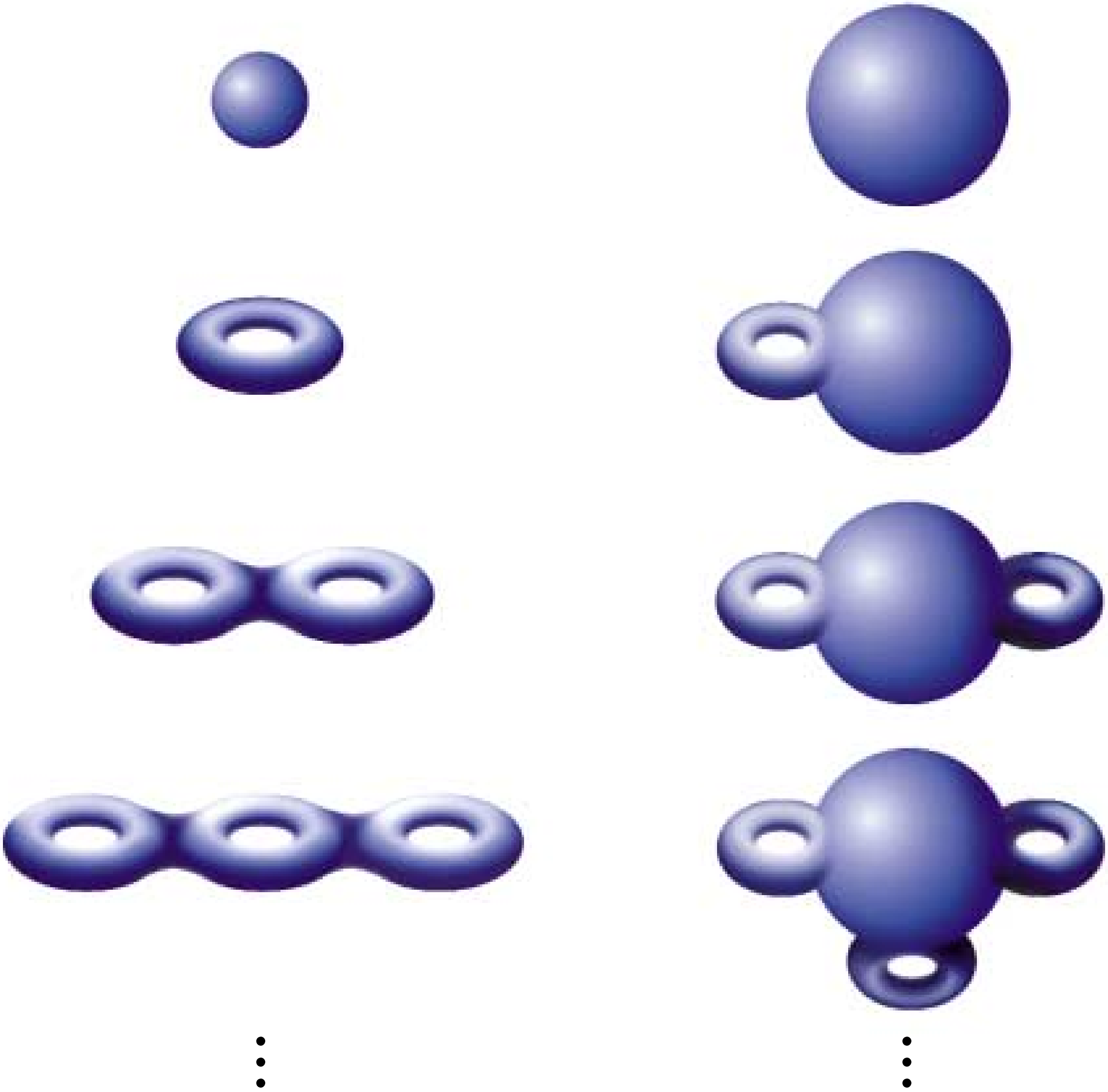
Futbol topu yüzeyi ve şişirilmiş otomobil iç lastiği, matematikte küre ve tor adını verdiğimiz iki yüzey örneğidir. Her iki yüzeyde de bir iç, bir de dış yüzey ayırdedebiliriz. Her yüzey tarafından sağlanmayan bu özellik, örneğin, "küre, yönlendirilebilir bir yüzeydir" diye ifade edilebilir. Doğada bu özelliği taşımayan, yani tek yüzlü yüzeyler de vardır. Bunun belki de en tanınmış örneği “Möbius şeridi” dediği-



Möbius şeridi tek taraflı bir yüzeydir

miz yüzeydir. Uzunca, dikdörtgen şeklindeki bir şeridin iki kısa kenarını, köşegenlerin uçlarındaki noktalar birbiriyle eşleşecek şekilde (şeridi bir defa burarak) bir araya getirir ve yapıştırırsak bir Möbius şeridi elde ederiz. Böyle bir şeridi bir noktasından başlayarak ve fırçayı kaldırmadan boyarsak her tarafını boyamış olduğumuzu görürüz.

Yukarıda tanımladığımız topolojik eşdeğerlik ve basit bağlantılılık kavramları daha yüksek boyutlarda da anlamlıdır. Tıpkı iki boyutlu uzayda noktaları bir referans sistemi sayesinde iki koordinatla ifade edebildiğimiz gibi, daha yüksek boyutlardaki noktaları da ikiden çok sayıda koordinatla ifade edebiliriz. Örneğin içinde yaşadığımız üç boyutlu uzayda her nokta, üçlü dik bir koordinat sistemine göre, üç koordinatla ifade edilebilir. Tarihsel olarak, ikiden yüksek boyutlu yüzeyler, koordinatları



Her kapalı, yönlendirilebilir yüzey, ya bir küreye ya da kulplu bir küreye topolojik olarak eşdeğerdir.

belli denklemleri sağlayan nokta kümeleri olarak ortaya çıkmıştır. Bunlara her sonlu boyutta rastlanabilir. Aslında, matematikte "manifold" dediğimiz bu daha genel yüzeylerin tanımı biraz dikkatli yapılmalı. Ancak bu derece ayrıntıya inmeyecek, bunlardan yüzey veya yüksek boyutlu yüzeyler diye söz edeceğiz. Süreklilik kavramı çok doğal bir şekilde daha yüksek boyutlara genelleştirilebilir. Böylece, örneğin sürekli deformasyonlardan, ve yüksek boyutlu bir yüzey üzerinde kapalı bir eğrinin, sürekli bir deformasyonla bir tek noktaya büzülmesinden söz edilebilir.

Matematikte en önemli problemlerden biri, iki veya daha yüksek boyutlu yüzeylerin topolojik eşdeğerlik bağıntısına göre sınıflandırılmasıdır. İki boyutlu yüzeyler için bu sınıflandırma biliniyor. Her iki boyutlu, yönlendirilebilir, kapalı (yani kenarları olmayan) yüzey, bildiğimiz standart küreye veya şekildeki gibi, sonlu herhangi sayıda içi boş kulp eklenmiş bir küreye topolojik olarak eşdeğerdir. Örneğin, otomobil lastiği, yani tor, ufak bir deformasyonla tek kulplu küreden elde edilebilir. Farklı sayıda kulp eklenmiş kürelerinse birbirlerine topolojik olarak eşdeğer olmadığı bilinmektedir.

Burada konumuz açısından çok önemli bir nokta şudur: Basit bağlantılı kapalı, yönlendirilebilir bir yüzey, topolojik olarak standart küreye eşdeğer olmak zorundadır. Çünkü herhangi bir sayıda kulp eklenmiş bir küre, basit bağlantılı değildir.

Poincaré, sözünü ettiğimiz bu önemli noktanın üç boyutlu yüzeyler için de doğru olup olmadığını sorgulamış, ve bunun sonucunda Poincaré Sanısı dediğimiz iddiayı ortaya atmıştır. Poincaré Sanısı şöyle ifade edilebilir:

Her basit bağlantılı, kapalı, yönlendirilebilir üç boyutlu yüzey, üç boyutlu standart küreye topolojik olarak eşdeğerdir.

Bu sanı henüz çözüme kavuşmamış olsa da pek çok yeni matematiksel kuramın doğup gelişmesine vesile olmuştur. Bu sanının daha yüksek boyutlu genelleştirmeleri ortaya atılmış, ama işin ilginç yönü, bunlar henüz üç boyuttaki problem çözüm beklerken, çözüme kavuşturulabilmiştir. Yine de bunlar çok önemli sonuçlardır ve matematik tarihinin en önemli kilometretaşları arasında yerlerini almıştır. 1961 yılında Stephan Smale beş ve beşten büyük boyutlarda, 1982 yılında Michael Friedman dört boyutta Genelleştirilmiş Poincaré Sanısını çözerek bugün matematiğin en saygın ödülü olarak bilinen "Field Madalyası" ile ödüllendirilmişlerdir. Çok şeyin bilindiği birinci ve ikinci boyut ile, topolojik problemleri çözebilmek için yeterince manevra alanına sahip olduğumuz daha yüksek boyutlar arasına sıkışmış üçüncü boyuttaysa Poincaré Sanısı yıllara ve kuramlara direnmekte, çözümü hâlâ pek çok matematikçinin düşlerini süslemektedir.

*Prof. Dr., ODTÜ, Matematik Bölümü