



$$\cot C = \frac{b}{c}$$

$$\cos C = \frac{1}{\sin B} = \frac{a}{b}$$
$$\operatorname{cosec} C = \frac{1}{\sin C} = \frac{a}{c}$$

$$d_1: y = m_1x + n_1 \quad d_1: a_1x + b_1y + c_1 = 0$$
$$d_2: y = m_2x + n_2 \quad d_2: a_2x + b_2y + c_2 = 0$$
$$d_1 \parallel d_2 \Leftrightarrow m_1 = m_2 \quad \checkmark$$
$$d_1 \perp d_2 \Leftrightarrow m_1 m_2 = -1 \quad \times$$
$$d_1 \perp d_2 \Leftrightarrow a_1 a_2 + b_1 b_2 = 0$$



$$x - 1 \geq 0$$
$$x \geq 1$$
$$(\sqrt{x-1})^2 = 2^2$$
$$x - 1 = 4$$
$$x = 5$$
$$S = \{5\}$$

İpler, Keçiler ve Koca Dünya

Prof. Dr. Ali Sinan Sertöz [Bilkent Üniversitesi, Matematik Bölümü

Matematikte bazı problemler yalnızca eğlenceli olduğu için ortaya atılır. Bunların çözümünün bilimde yeni ufuklar açması değil, çözüme zevk vermesi beklenir.

Problem ve sonucu yeterince eğlenceli ise değişik versiyonları ortaya atılır ve eğlence sürdürülür. Her ne kadar bu çeşit problemler eğlence olsun diye ortaya çıkartılmışlarsa da çözümleri bazen derin matematik teknikleri gerektirir.

Bu yazıya konu olan iplerle ilgili problem de ilk kez 1748 yılında ortaya atıldı. Zaman içinde ufak tefek değişikliklerle tekrar tekrar soruldu. Tam istenen çözüm ise ancak 2020 yılında bulunabildi.

Bugün işte bu problemdeki iplerle ilgileneceğiz.

$$(\sqrt{3x-1})^2 = (x+2)^2$$

$$x-1 = x^2 + 4x + 4 \quad / \quad x^2 - x - 5 = 0$$
$$-x - 1 - 4x - 4 \quad / \quad -5x - 5 = 0$$
$$\Delta = 1 - 20 \quad \Delta = -19 < 0$$



Problemın Öyküsü: Başlangıç

Problemimizin ilk versiyonu 1748’de *Ladies Diary* adlı yıllık bir dergide yayımlandı. Yalnız bu hâlinde bir keçi değil, bir at vardı. Problemde, yuvarlak bir havuzun dış kenarına uzunluğu havuzun çevresi kadar olan bir ip ile bağlanmış atın havuz çevresinde otlayabileceği alanın bulunması isteniyordu.

Eğer atın ipini havuz yerine bir kazığa bağlasaydık atın otlanacağı bölgenin alanı elbette ipin uzunluğunu yarı çap olarak alacağımız bir dairenin alanına eşit olacaktı. Kazık yerine havuz koyduğumuz zaman, hem atın havuzun kapladığı alanda otlamayacağını hem de at havuz etrafında dolaşmaya başlayınca havuzun kenarlarına dolanan ipin atın uzanabileceği bölgeyi kısıtlayacağını göz önünde bulundurmamız gerekecek.

Bu problemin çözümü, sözünü ettiğimiz dergi yıllık olduğu için ertesi yıl yayımlandı. Yani, okuyucular arasında merak edenlere problem üzerine çalışmaları için koca bir yıl süre tanındı veya çözümü merak edenlere sabırsızlıkla geçmesini bekledikleri bir yıl verildi.

Biz problemin bu ilk hâliyle ilgilenmeyeceğiz.

At Yok Oluyor!

Matematikçilerin havuz etrafında cereyan eden bir problemi duyup da problemi bir de havuz içinde sormadan geçebileceklerini düşünmek abes olur. Elbette önünde sonunda bir matematikçi çıkıp atı daire şeklindeki bir otlığa bağlayıp ne büyüklükte bir alanda dolaşabileceğini soracaktı ve sordu da! Ama bu sorunun ortaya çıkması yüz yıldan fazla sürdü.

Amerikan Matematik Birliğinin (Mathematical Association of America) meşhur aylık dergisi *Monthly*’nin 1894’teki ilk sayısında beklediğimiz problem nihayet soruldu. Derginin 30 numaralı geometri problemi olarak sorulan bu soruda at yoktu, sadece kesişen iki çember vardı.

Alanı bir birim olan dairenin çevresi üzerinde bir merkez alınarak ikinci bir daire çizilmiş, ortak kesişim alanları yarım birim oluyorsa ikinci dairenin alanı kaç olur diye sorulmuştu.

Dikkat ederseniz problemin bu hâliyle at ve havuzla ilgisi kalmadı ve kusursuz bir geometri problemine dönüştü. Matematikçiler ata ve havuza bakarken sadece çemberleri ve daire alanları görmüşler. Dışarıdaki alanı değil de içerideki alanı hesaplayalım demişler.

Peki ama bu versiyonda neden at ve havuz yok olmuş? Çünkü matematikçiler probleme bakınca sadece geometri görmüşler, astrofizikçilerin yıldızlara bakınca sadece nükleer reaksiyon gördükleri gibi.

At Keçi Olarak Geri Dönüyor!

İnsanlar hayvanlarla ilgili problemleri geometri problemlerinden daha ilginç bulmuş olacak ki *Monthly* dergisindeki problem, bir süre sonra bir keçi bulmacası olarak ortalıkta dolaşmaya başlamış.

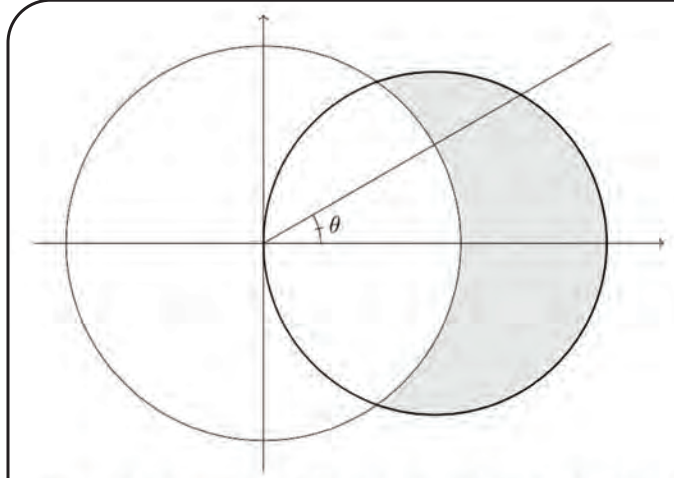
Bu bulmacada bir keçiye daire biçiminde bir tarlanın kenarına bağlıyorsunuz ve keçinin boynuna bağladığınız ip ne uzunlukta olmalı ki keçi dairenin yalnızca yarısında otlansın sorusuna cevap arıyorsunuz.

Keçi Nasıl Eşek Olur?

Keçi problemi Türk matematik dünyasına doksanlı yıllarda bir eşek problemi olarak girdi. İnternetin yeni yeni kullanıma girdiği bir dönemdi. Ofisimizden hiç ayrılmadan başka şehirlerde, hatta başka ülkelerdeki meslektaşlarımızla internet aracılığıyla yazışmak heyecan vericiydi. Nasıl olmasın ki? Ne postaneye gitme zahmeti ne kâğıda mektup yazma ne de cevap ne zaman gelecek sabırsızlığı kalmıştı. Üstelik yazdıklarımızı herkes aynı anda okuyabiliyor ve cevap verebiliyordu.

Henüz çevrim içi görüntülü görüşme konusu bir hayal olarak bile aklımızda yoktu. Yeni bir buluşun tadını çıkarıyorduk. İşte böyle bir ortamda arkadaşlardan biri bize bir eşek problemi sordu.

Daire biçimindeki bir tarlanın sınırına bağlanan eşeğin boynundaki ip ne uzunlukta olmalı ki eşek tarlanın ancak



Keçi problemini modellediğimizde yukarıdaki şekli elde ederiz. Sağdaki dairenin çapı 1 birimdir. Soldaki dairenin merkezi orijindedir ve çapı R birimdir. İki dairenin ortak alanı birinci dairenin alanının yarısı, yani $\pi/2$ olacak. Demek ki birinci dairenin ortak alan dışında kalan taralı kısmının alanı da $\pi/2$ olacak. Taralı alanı seçmemizin nedeni taralı alanı hesaplayacak integralin daha basit yazılabiliyor olmasındandır. Bu alanın $\pi/2$ 'ye eşit olmasını şu şekilde yazabiliriz.

$$\int_{\theta = -\cos^{-1} \frac{R}{2}}^{\theta = \cos^{-1} \frac{R}{2}} \int_{r=R}^{r=2 \cos \theta} r \, dr \, d\theta = \frac{\pi}{2}.$$

İntegrali açtığımızda ise

$$\frac{1}{2} R \sqrt{4 - R^2} + 2 \cos^{-1} \left(\frac{1}{2} R \right) - R^2 \cos^{-1} \left(\frac{1}{2} R \right) = \frac{1}{2} \pi$$

buluruz. Herhangi bir bilgisayar programı yardımıyla sayısal çözüm istediğimizde

$$R = 1,158728473...$$

buluruz. Demek ki keçinin boynuna bağlayacağımız ipin uzunluğu tarlanın çapının yaklaşık 1,15 katı kadar olursa keçi tarlanın yalnızca yarısına erişim sağlayabilecektir.



yarısında otlatabilsin. Problemin geçmişini bilmediğimiz için atın keçiye, keçinin de eşeğe nasıl dönüştüğünü merak etmemiştik.

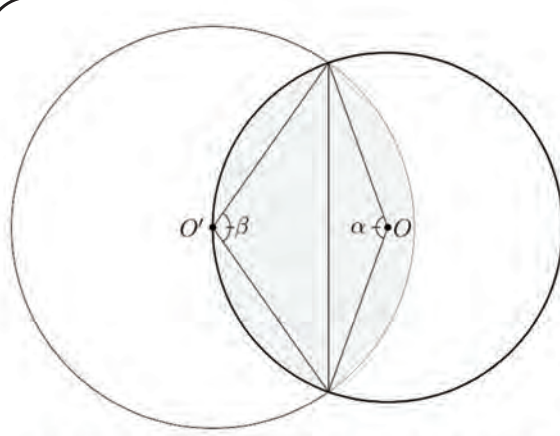
Problemi çoğumuz hevesle çözdük ve bize bir daha böyle basit şeyler sorma diye arkadaşla hava atmayı da ihmal etmedik.

Ama Kazın Ayağı Göründüğü Gibi Değil!

Kaz şimdi nereden çıktı demeyin! O lafın gelişi... Biz yine problemdeki keçiye dönelim.

Bu çeşit problemler, tarla kenarına bir keçi bağlayıp otladığı alanı ölçerek ve duruma göre ya daha kısa ya da daha uzun ipler bağlayarak, yani deneme yanılmayla çözülmez. Problem matematiksel bir modele çevrilir ve model üzerinden çözülür. Sonra meraklısı bu çözümü alıp gerçek hayata; eşek, keçi ya da ata uygulayabilir.

Bu problemin modeli elbette yüz yıl önce *Monthly*'de çıkan problemin ta kendisi. Yani, kesişen iki dairenin ortak alanı yarı çapları cinsinden hesaplanacak. Bunun için dairelerden birini sabit tutarız. Ortak alanın bu dairenin alanının kaçta kaç olmasını istiyorsak bunu belirten bir denklem yazarız. Bu denklemi çözersek diğer dairenin yarı çapının kaç olması gerektiğini de buluruz.



Yukarıdaki şekilde yarıçapı 1 birim olan tarlaların merkezini O noktası ile, keçiye bağladığımız noktayı, yani büyük dairenin merkezini de O' ile gösteriyoruz. Biraz düzlem geometri ve trigonometri kullanınca taralı ortak bölgenin alanının

$$\beta \cos \beta - \sin \beta + \pi$$

şekline yazılabileceğini görürüz. Bu alanın birim dairenin alanının yarısına eşit olmasını sağlayacak β açısının

$$f(x) = \sin x - x \cos x - \frac{\pi}{2}$$

fonksiyonun $[0, \pi]$ aralığındaki köklerinden biri olacağını görürüz. Öte yandan

$$f'(x) = x \sin x > 0, \quad x \in (0, \pi)$$

olduğundan bu aralıkta $f(x)$ fonksiyonunun artan bir fonksiyon olduğunu ve dolayısıyla bu aralıkta yalnız tek bir kökü olduğunu görürüz. Hatta bu kökün $[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{4}]$ aralığında olduğunu görmek mümkün.

Sonuç olarak eğer $f(\beta) = 0$ ise aradığımız R değeri

$$R = 2 \cos \frac{\beta}{2}$$

olarak elde edilir.

Şimdi problem $f(x) = 0$ denkleminin çözümünü bulmaya indirgendi.





Ama her denklem de hemen çözülemez ki! Bizim bu modellemede karşımıza çıkan denklem de cebirsel bir denklem değildir. Yani burada bir polinomun köklerini aramıyoruz. Kaldı ki o da çok zor bir problemdir. Biz bu problemde trigonometrik fonksiyonlar içeren bir denklemi çözmeye çalışıyoruz. Bu çeşit denklemlere aşkın denklemler denir.

Aşkın denklemlerde genellikle kök için kapalı bir ifade bulmak zordur. Bunun yerine yaklaşık çözümler aranır. Yaklaşık bir çözümün anlamlı olması için bulunan yaklaşımın gerçek değerden farkının önceden belirlenen bir tolerans miktarını aşmamasını sağlayacak bir kuramsal alt yapıya sahip olması gerekir.

Yaklaşık Çözüm Arıyoruz

Çözmek istediğimiz denklem $f(x)=0$ olsun. Bu denklemi sağlayan x değerini kapalı bir ifade ile yazamayacağımızı düşündüğümüzü varsayalım. Çözümü veren yaklaşık bir değer arayacağız.

Aslında bu o kadar da kötü bir durum değil. Aradığımız kök eğer karekök iki olsaydı, kökü kapalı bir ifadeyle

vermiş olmamız bize yalnızca entelektüel bir tatmin verecekti. Uygulamada biz yine karekök ikinin sonsuz olan ondalık açılımından belli sayıda terim kullanabilecektik. Ondalık virgülden sonraki ilk iki veya üç terimi almak da pek çok uygulama için yeterli olacaktı.

Astrofizikçiler pi sayısını genellikle üç olarak alır ve onların hesaplarında pi sayısının oynayacağı etkiyi bu üç sayısı yerine getirir.

Demek ki ne aradığımızı biliyorsak ve hata payını kontrol edebiliyorsak yaklaşık çözümün küçümsenecek bir yanı yok.

Öyleyse yaklaşık kök aramaya başlayabiliriz.

Orta Nokta Yöntemi

İlk yöntemimiz akla ilk gelen ve amatör bir yöntem. Bu yöntem aradığımız kökü istediğimiz hassasiyette bize verecek ama biraz sabırlı olmamız gerekecek çünkü bu yöntem köke çok yavaş yaklaşır.

Aradığımız köke β adını verelim. Bu β sayısının nerede olacağı konusunda bir beklentimiz olur genellikle.



Hiçbir problem üzerine bodoslama gidilerek çözülmez. Önce bir tahminimiz olur, sonra bu tahmine göre hareket ederiz. Problemi çözüm çabamız ilerledikçe, edineceğimiz yeni bilgiler ışığında, tahminimizi yeniden ayarlamamıza engel bir durum yok elbette.

Rotası olmayan bir yelkenliye hiçbir rüzgâr yardım etmez!

Biz de aradığımız β sayısının bulunacağını beklediğimiz yerlerde rastgele sayılar alıp $f(x)$ fonksiyonunun bu sayılardaki değerlerine bakarız. Fonksiyonumuzun işaret değiştirdiği bir aralık ararız. Yani deneyerek öyle a ve b sayıları bulacağız ki eğer $f(a) > 0$ ise $f(b) < 0$ olacak, ya da $f(x) < 0$ ve $f(b) > 0$ olacak.

Şimdi ilerlemek için fonksiyonumuzun sürekli olduğundan emin olmamız gerekir. Biz fonksiyonumuzun sürekli olduğunu gözledik diye düşünüp devam edelim.

Fonksiyonumuz sürekli ve $[a, b]$ aralığında işaret değiştirdi. Demek ki bu aralığın içinde bir yerde sıfır oldu. Aradığımız kök bu aralığın içinde.

Eğer bu aralığın orta noktasına c der ve aradığımız kök için yaklaşık değer c 'dir dersek yaptığımız hata $(b-a)/2$ 'den büyük olamaz.

Yani $|\beta - c| < (b-a)/2$.

Eğer $(b-a)/2$ size yeterli hassasiyeti vermediyse devam edelim.

Elimizdeki $[a, b]$ aralığının orta noktası olan c noktasında fonksiyonumuzun aldığı değere bakalım. Bu değer eğer sıfır ise kökü bulduk demektir. Eğer sıfır değilse $f(c)$ ya pozitifdir ya da negatiftir. Bu durumda fonksiyonumuz ya $[a, c]$ aralığında ya da $[c, b]$ aralığında işaret değiştiriyordur.

Fonksiyonumuzun işaret değiştirdiği aralığı alıp o aralığın orta noktasını kökümüz için yaklaşık değer olarak verirse yapacağımız hata $(b-a)/4$ 'den fazla olamaz.

Eğer bu hassasiyet de yetmediyse tatmin oluncaya kadar devam edebiliriz. Sistem mükemmel bir şekilde çalışacaktır ama pratikte

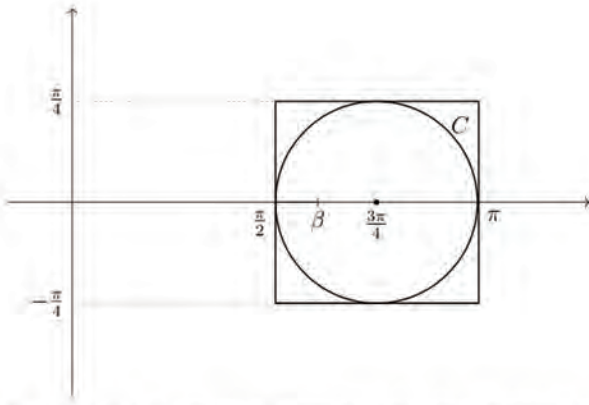
istenen hassasiyete yaklaşmak için yukarıdaki işlemi çok fazla yinelemek gerektiğini göreceksiniz. Bu da aslında bir bilgisayar programıyla aşlamayacak bir sorun değil.

Newton Metodu

Bilim dünyasında adını duyduğumuz kişilerin adlarının beklenmedik anlarda karşımıza çıkması çok rastlanan bir olgudur. Bunun nedeni bu insanların çok çalışıp çok şey üretmiş olmalarındandır. Hayatı

boyunca hiçbir şey üretmemiş bir insanın adını yüz yıl sonra kim niye hatırlasın?

Newton metodunu uygulamak için aradığımız kökün bulunacağı civarda rastgele bir x_1 sayısı seçeriz. Bu bizim ilk tahminimizdir. Eğer $f(x_1)=0$ ise aradığımız kökü büyük bir şans eseri bulduk demektir. Genellikle böyle bir şey olmaz elbette! Bu aşamada Newton metodu devreye girer. Fonksiyonumuzun grafiğinin x_1 noktasındaki teğet doğrusunun x eksenini kestiği noktaya x_2 deriz. Sonra aynı işlemi x_2 noktasındaki teğeti kullanarak yineleriz.



Reel x değişkeni yerine z karmaşık değişkenini koyarak karmaşık düzlemin her noktasında analitik olan karmaşık değerli

$$f(z) = \sin z - z \cos z - \frac{\pi}{2}$$

tam fonksiyonunu elde ederiz. Bu fonksiyonun yukarıdaki dikdörtgen içindeki tek kökünün reel doğru üzerinde olduğu, hatta bu kökün $(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{4})$ aralığında olduğu gösterilebilir. Özellikle dikdörtgen içindeki C çemberi üzerinde $f(z)$ fonksiyonunun kökü yoktur ve C çemberinin içinde bir tek kökü vardır. Bu köke β dersek, temel karmaşık analiz kavramları kullanarak

$$\beta = \frac{\int_C \frac{z}{f(z)} dz}{\int_C \frac{1}{f(z)} dz}$$

yazabiliriz. Burada C çemberinin $|z - \frac{3\pi}{4}| = \frac{\pi}{4}$ olarak yazılabileceğini de ekleyelim.

Bu durumda $R = 2 \cos(\beta/2)$ olduğundan aranan cevap

$$R = 2 \cos \left(\frac{1}{2} \frac{\int_C \frac{z}{f(z)} dz}{\int_C \frac{1}{f(z)} dz} \right)$$

olarak bulunur. Bu denklemin sağ tarafında R olmadığı için R için çözülmesi gereken bir denklem değil, R değerini doğrudan veren bir ifade bulduk ki 100 yılı aşkın bir süredir aranan sonuç Ingo Ullisch'in bu çözümüydü.

Bu işlemi tekrarlayarak aradığımız t değerine çok çabuk varmamız mümkün. Elbette yöntemin bizi şaşırttığı durumlar da olur ama bu teknik ayrıntılara girmeyelim. Hata payı hesapları yerine de $x_1, x_2, x_3, \dots$ dizisinde birbirini takip eden sayıların basamakları aynı olmaya başlayınca duracağımızı kabul edelim.

Bu yöntemi denerseniz köke yukarıda açıklanan orta nokta yöntemiyle kıyaslanamayacak kadar çabuk yaklaştığınızı göreceksiniz.

Ama ille de Tam Çözüm...

Keçinin boynuna bağlayacağımız ipin uzunluğunu yaklaşık yöntemlerle istediğimiz hassasiyette elde ettiğimize göre artık bu problemle işimizin bittiğini düşünmeyin. Bu problem zaten bir merak sonucu ortaya atılmıştı. Şimdi de merak ettiğimiz konu bu denklemin niye cebirsel olarak çözümediğimiz. Aradığımız β kökü için kapalı bir ifade bulmak ne kadar güzel olurdu. Bunu yapamamak bazı matematikçilerin uykusunu kaçırır da bazen elden bir şey gelmiyor.

Neyse ki bu konuyu 2020 yılında genç bir matematikçi sonuca ulaştırdı da artık geceleri biz de biraz daha rahat uyuyoruz. (Uykumuzu kaçıran tek problem bu değil ki!)

Gelin bu probleme bir daha bakalım. Keçiler, ipler, tarlalar ve otlar var. Bir problem daha ne kadar gerçek dünyanın içinde olabilir? Böyle bir problemi çözmek için karmaşık sayılar kuramının devreye gireceği kimin aklına gelir? Ingo Ullisch'in aklına geldi işte.

Çözmek istediğimiz fonksiyonumuzun $f(x)$ ifadesinde yer alan x bir gerçel değişkendir. Biz x yerine z karmaşık değişkenini koyup $f(z)$ fonksiyonuna baktığımızda, bunun karmaşık analizde her yerde tanımlı analitik bir fonksiyon olduğunu görürüz. Bu durumda tüm karmaşık analiz teoremleri bu fonksiyon için kullanılabilir.

Sadece bakış açımızı değiştirerek daha önce hiç söz konusu dahi olmayan muazzam bir birikimi kullanmanın yolunu açmış olduk.



çalışmalarıyla saygın ve olağanüstü yetkin bir matematik dalı hâline gelen karmaşık analiz; bugün bilimsel hesaplar yapan bir insanın olmazsa olmaz repertuarı içindedir.

Karmaşık analizin temel sonuçlarından biri de analitik bir fonksiyonun kapalı bir eğri üzerindeki integralinin sıfır olmasıdır. Bunun uzantısı olarak da fonksiyonun türevini fonksiyona bölüp de bir kapalı eğri üzerinde integralini alırsanız çıkan sonuç size fonksiyonun o kapalı bölgedeki köklerinin sayısı hakkında bilgi verecektir.

Hemen hemen her karmaşık analize giriş kitabının başlarında yer alan bu iki teorem, çok zekice hazırlanmış bir plan dâhilinde uygulandığında bize keçi probleminin kapalı bir çözümünü verir.

Kısa Tarihçe

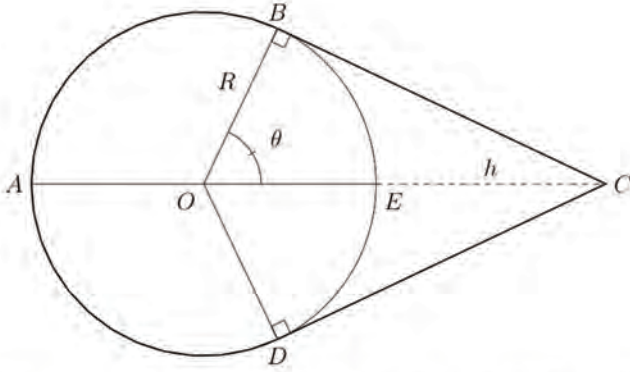
Bu problemin geçmişini yazmak istesek elbette 1540 yılında Cardano'nun yayımladığı *Ars Magna* (Latince büyük sanat anlamına gelir) kitabından başlamamız gerekir. Negatif sayıların kareköklerini bir sayıymış gibi olağan cebir işlemlerine tabi tutarsak nasıl sonuç alabileceğimiz ilk kez bu kitapta açıklandı.

Sonra 1748'de bir havuzun kenarına bağlı bir at problemi, çözümün nerelere varacağı konusunda

Bu arada karmaşık sayıların herhangi bir dünya meselesini ya da mühendislik problemini çözmek için değil, sadece entelektüel bir oyun olarak, üçüncü derece polinom kökleriyle oynarken Girolamo Cardano tarafından on altıncı yüzyılda ortaya atıldığını da hatırlayalım.

Daha sonra Louis Cauchy, Bernhard Riemann ve Karl Weierstrass gibi matematikçilerin yoğun





Dünyayı saran ipe 1 metre ekleyip C noktasından çekip gerdik. Şimdi $h = EC$ uzunluğunu hesaplamak istiyoruz. Şeklimiz geometrik ayrıntıların rahatça görülebilmesi için temsili olarak çizilmiştir ve gerçek oranları yansıtmaz.

Basit gözlemlerle

$$h = R(\sec \theta - 1)$$

olduğunu görürüz. Öte yandan AB yayının uzunluğunu $\widehat{AB}$ olarak gösterirsek aradığımız θ değerinin

$$\widehat{AB} + BC = \pi R + \frac{1}{2}$$

denklemini sağladığını görürüz. Bu arada

$$BC = R \tan \theta, \text{ ve } \widehat{AB} = (\pi - \theta)R$$

olduğunu göz önüne alarak θ değerinin sağlaması gereken denklemin

$$\tan \theta - \theta = \frac{1}{2R}$$

şekline büründüğünü görebiliriz. Burada $R = 6.378.134\text{m}$ olarak alındığında sayısal çözüm olarak

$$\theta = 0,006172536504 \dots \text{ ve } h = R(\sec \theta - 1) = 121,503\text{m}$$

buluruz. Demek ki ip yerden 121 metre 50 santimetre 3 milimetre yükselecek.

Nihayet 2020 yılında Ingo Ullisch adlı genç bir Alman matematikçi Cardano'nun mirasından yararlanarak bu probleme son noktayı koydu.

Bir tuhaflık olarak ortaya atılan karmaşık sayılar ve eğlence olsun diye öne sürülen bir bilmecenin yüzlerce yıl sonra birleşip mutlu sonla biten bir hikâye oluşturmalarına nasıl şaşmaz insan!

İp Diye Başlamışken...

İpi bir keçiye bağlamak size yeterince büyük bir problem olarak görünmediyse gelin bu ipi dünyanın etrafına saralım.

Gerçek hayat problemlerinin modellenmesinde bir ideal yaklaşım vardır. Yaptığımız model gerçek hayatı temsil eder ama gerçek hayat değildir. Örneğin, biz de dünyanın etrafına ip bağlamaya kalktığımızda aşmamız gereken dağları, geçmemiz gereken okyanusları matematik modelimize taşımayız. Dünyayı kusursuz bir küre olarak kabul ederiz.

habersiz, eğlencelik bir problem olarak ortaya atıldı.

Bu problemten doğal olarak bağımsız bir şekilde on dokuzuncu yüzyılda matematikçiler karmaşık sayı değeri alan fonksiyonların kuramını geliştirdiler.

On dokuzuncu yüzyılın son yıllarında *Monthly* dergisinde bizim keçi problemi kesişen iki daire olarak tekrar ortaya çıktı.

Ondan sonraki yüz otuz yıl boyunca problem gerek keçi gerekse eşek baş aktörleri aracılığıyla değişik mecralarda soruldu ve birbirinden değişik aşkın denklemlerin çözümü olarak cevabın bulunacağı gösterildi.

Ekvator hattı etrafına bir ip bağladığımızı düşünün.

Bu ipi sıkıca bağladıktan sonra fikir değiştirelim ve bu ip çok sıkı oldu bunu biraz gevşetelim diyelim. Fazla da abartmayalım ve ipe yalnızca bir metre ek yapalım. İp şimdi biraz bol oldu. İpi çekip germek ve altından geçebilir miyiz diye bakmak istiyoruz.

Elbette bu sorunun cevabını öğrenmek için gerçekten de Dünya'nın etrafına binlerce kilometre uzunluğunda ip sarmamız mümkün değil. O yüzden problemi kendi modelimiz üzerinde çözeceğiz.

Ekvatoru sıkıca saran ipe bir metre daha ek yaparsak ipi tutup çektiğimizde yerden ne kadar yükselir?

Ekvatorun etrafına saracağımız ipin uzunluğu kırk bin kilometre civarında, yani kırk milyon metre civarında olacak ve bu kırk milyon metrelik ipe biz sadece bir metre daha ekleyeceğiz. Sonra ipi tutup yukarı doğru çekip gereceğiz. İp gerildiğinde yerden ne kadar yükselebilir? Biz artık bu ipin altından geçebilir miyiz yoksa biraz daha uzatmamız gerekir mi?

Çözüm Arayışı

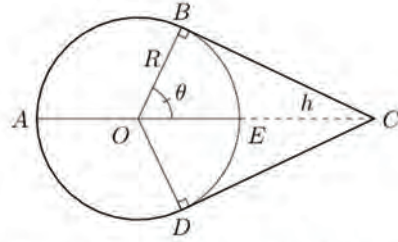
Bu problemin cevabı da yine aşkın bir denklemin kökü olarak karşımıza çıkacak. Bu çeşit denklemlerin sayısal çözümleri artık bilgisayar programları aracılığıyla kolayca elde edilebiliyor.

Bu soru için bilgisayarın verdiği cevaba elbette inanmıyor insan. Bu kez makine kesin yanıldı diye düşünüp insan kendisi çözümünü arıyor.

İlk akla gelen yöntem denklemin içinde adı geçen fonksiyonların Taylor açılımlarını kullanmak.

Bir fonksiyonun Taylor açılımı, o fonksiyonu türevleri cinsinden yazılan bir sonsuz toplama eşit kılma olgusudur. Kimse oturup bu sonsuz sayıdaki terimi toplamayacağı için böyle bir açılım ilk başta gereksiz bir güzellik olarak algılanabilir. Oysa Taylor açılımlarını yararlı ve kullanışlı kılan özellikleri genellikle ilk üç beş terimi kullanmanın o fonksiyonun değerlerini büyük bir hassasiyetle hesaplamakta yeterli olabilmesidir.

Sonsuz toplamalarla ilk ilgilenen matematikçi Zeno'dur. Bir yolu katetmek için her aşamada kalan kısmın



İp probleminin çözümünde temel analiz tekniklerinin gücünü deneyebiliriz.

$$\tan \theta - \theta = \frac{1}{2R}$$

denkleminde $\tan \theta$ için Taylor açılımı olan

$$\tan \theta = \theta + \frac{1}{3}\theta^3 + \frac{2}{15}\theta^5 + \frac{17}{315}\theta^7 + \frac{62}{2835}\theta^9 + \dots$$

yerine açılımın ilk iki terimini alıp

$$\left[\theta + \frac{1}{3}\theta^3\right] - \theta = \frac{1}{2R}$$

denklemini çözersek

$$\theta = 0,006172567861\dots$$

buluruz. Bu değeri

$$h = R(\sec \theta - 1)$$

denkleminde yerine koymadan önce $\sec \theta$ için verilen Taylor açılımından

$$\sec \theta = 1 + \frac{1}{2}\theta^2 + \frac{5}{24}\theta^4 + \frac{61}{720}\theta^6 + \frac{277}{8064}\theta^8 + \dots$$

yalnızca ilk iki terimi alıp

$$h = R\left[\left(1 + \frac{1}{2}\theta^2\right) - 1\right]$$

eşitliğini yukarıda bulduğumuz θ değeriyle hesapladığımızda

$$h = 121,505m$$

buluruz. Yani 121 metre 50 santimetre 5 milimetre.

Temel analiz teknikleriyle yaptığımız yaklaşım hesaplarında 40 milyon metreden fazla uzunluğu olan bir ipe ilgili bir problemde sadece 2 milimetre hata yaptık. Bilgi kudrettir!

yarısını katetmek gerektiğini ve bu işlemin sonsuz defa yapılması gerektiğini görmüş ve varılması gereken yere hiçbir zaman varamayacağımız sonucunun çıkması gerektiğini ama elbette her zaman o yere varabildiğimizi söyleyip Zeno paradoksunu ortaya atmıştır.

Sonsuz tane değeri toplayıp sonlu bir sayı bulabileceğimizi ilk kez Arşimet göstermiştir. On dördüncü yüzyılda Hint matematikçileri bazı trigonometrik fonksiyonlara eşit olan sonsuz kuvvet serileri bulmuşlardır. Konunun yaygın kullanıma girmesi on yedinci yüzyıl İngiliz matematikçilerinin çalışmaları sonucu gerçekleşmiştir.



Biz de şimdi bu mirası kullanıp fonksiyonumuzun Taylor açılımına başvurup Dünya'nın etrafına sardığımız ipi bir metre uzatsak altından geçebilir miyiz sorusuna cevap arıyoruz.

Taylor açılımındaki ilk birkaç terimi kullanarak ipin yerden ne kadar yükseleceğini hesaplıyoruz ve yaptığımız hesaplarla bilgisayarın bize verdiği cevap arasında sadece iki milim fark olduğunu görüyoruz.

İp yerden yüz yirmi bir metre yukarı kalkıyor. Göz önüne getirmek mümkün değil ama hesaplar kesin. Kırk milyon metrelik ipi bir metre uzatınca dünya etrafındaki ipin gevşekliğinin ipi yüz yirmi metre yukarı çıkaracağına inanmayanlara Nasrettin Hoca'dan miras kalan cevabı vermek gerekir: "İnanmayan ölçsün!".

Sonunda Biraz da Gerçek Hayat

Ullisch'in 2020'deki çözümünü anlatan bir derginin internet sayfasında okuyucuların bu çözüm hakkında yaptıkları yorumlar yer alıyor. Bu yorumlar arasında insanı matematiğin fantastik dünyasından yaşadığımız gerçek dünyaya geri getiren tatlı bir yorum vardı. Bu okuyucu yıllarca keçi beslediğini ve keçilerin bu probleme hiç de uygun aktörler olmadığını yazmıştı: "Keçilerin tarlanın yarısındaki otları yemesini boşuna beklersiniz. Keçiler o ipi de yer, tarladaki tüm otları da yer. Sonra da tarlanın çitlerini yiyip dağılırlar. Toplayıp geri getireceğim diye canınız çıkar."

Oysa matematik modellerdeki atlar, eşekler ve keçiler ne kadar uslu ve sakın. ■

Kaynaklar

Ingo Ullisch, "A closed-form Solution to the Geometric Goat Problem", *The Mathematical Intelligencer*, 42, 12-16, 2020.
Marshall Fraser, "A Tale of Two Goats", *Mathematics Magazine*, 55, 221-227, 1982.
Ali Sinan Sertöz, "Eşekliğin Alemi Yok!" *Matematik Dünyası*, 6, 13-17, 1996.
<https://www.quantamagazine.org/after-centuries-a-seemingly-simple-math-problem-gets-an-exact-solution-20201209/>